

Mechanik I mit Relativitätstheorie

Christoph Greub

Institut für theoretische Physik
Universität Bern

Frühjahrssemester 2020

Die Kapitel 1–4 über klassische Mechanik des vorliegenden Skripts wurden in vielen Teilen übernommen vom Skript der Vorlesung *Mechanik I*, verfasst von Hans Bebie im SS 1997, und der neueren Auflage von Jürg Gasser im SS 2002. Die Kapitel 5–8 über spezielle Relativitätstheorie basieren auf dem Skript der Vorlesung *Mechanik II* von H. Bebie und H. Leutwyler, Auflage 1998/99. Alle Tippfehler und Unklarheiten, die sich eingeschlichen haben, gehen selbstverständlich zu meinen Lasten.

Ich danke an dieser Stelle Martin Schmid, der sorgfältig und effizient alle Figuren für die Kapitel 1–4 als postscript-files erstellt hat. Dank seiner Hilfe ist es mir dann gelungen, auch die Bilder für die restlichen Kapitel anzufertigen.

Ausserdem danke ich Christoph Haefeli, Anita Kilchenmann und Martin Schmid für das sorgfältige Durchlesen des ersten Teils des Manuskriptes (Kapitel 1–4), sowie Ottilia Hänni und Thorsten Ewerth für die wertvolle Mitarbeit am zweiten Teil.

In der vorliegenden Version sind Detailunterlagen, die ich in den vorangehenden Jahren jeweils in Form von handgeschrieben Notizen abgegeben habe, eingebaut.

Vorbemerkungen

Das Skript Mechanik I behandelt einige Themen der klassischen Mechanik (ohne Verwendung des Lagrange- und Hamiltonformalismus) und gibt zudem eine Einführung in die spezielle Relativitätstheorie. Mechanik II bringt den Lagrangeformalismus, den kanonischen Formalismus und eventuell Ergänzungen zur speziellen Relativitätstheorie. Ferner ist dort geplant, die formalen Gemeinsamkeiten der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik zu untersuchen.

Für die Übungen kann soweit möglich MAPLE oder MATHEMATICA zu Hilfe genommen werden, zum Beispiel für Grafiken, numerische Integrationen oder numerische Lösungen von Differentialgleichungen.

Literatur zu Mechanik I

- T. Fliessbach, Mechanik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1999.
- F. Scheck, Mechanik, Springer Verlag, Berlin, 1999.
- L.D. Landau und E.M. Lifshitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1, Mechanik. Akademie-Verlag, Berlin 1990.
- A. Fölsing, Albert Einstein, Suhrkamp, Taschenbuch 2940.
- A. P. French, Spezielle Relativitätstheorie, Uni-Text, Vieweg.

Inhaltsverzeichnis

1	Kinematik und Mechanik des Massenpunktes	1
1.1	Bewegungen in einer Dimension	1
1.1.1	Geschwindigkeit und Beschleunigung	1
1.1.2	Gleichförmig beschleunigte Bewegung : $\ddot{x}(t) = a_0$	2
1.1.3	Taylor-Entwicklung	2
1.2	Bewegung im 3-dimensionalen Raum: Ortsvektor, Bahnkurve	3
1.3	Geschwindigkeit	3
1.4	Beschleunigung	4
1.5	Gleichförmige Bewegung : $\vec{a} = 0$	5
1.6	Gleichförmig beschleunigte Bewegung	6
1.7	Bewegungen im Schwerfeld der Erde	7
1.8	Gleichförmige Kreisbewegung	9
1.9	Taylor-Entwicklung	10
1.10	Differentialgeometrie der Bahnkurve	10
1.10.1	Änderung des Geschwindigkeitsbetrages	10
1.10.2	Momentane Bahnebene	11
1.10.3	Krümmungszentrum, Krümmungsradius	12
1.11	Masse	14

1.12	Bewegungsgesetz, Kraft	16
1.13	Inertialsystem, Scheinkräfte	18
1.14	Arbeit, Energie	19
1.14.1	Mechanische Arbeit	19
1.14.2	Kinetische Energie	20
1.14.3	Potential	21
2	Lösung spezieller Bewegungsgleichungen	25
2.1	Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen	25
2.1.1	Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen	25
2.1.2	Beispiele von partiellen Differentialgleichungen	26
2.2	Differentialgleichungen erster Ordnung	27
2.2.1	Ein einfaches Beispiel: $\dot{v} = -\beta v$	27
2.2.2	Schrittweise Integration	30
2.2.3	Verallgemeinerung	32
2.2.4	Allgemeine Lösung, spezielle Lösung	35
2.2.5	Richtungsfeld, graphische Lösung	35
2.3	Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	37
2.4	Beispiele aus der Mechanik, Hinweise zur Lösung	40
2.4.1	$m\ddot{x} = 0$, freies Teilchen in einer Dimension	40

2.4.2	$m\ddot{x} = F(t)$	40
2.4.3	$m\ddot{x} = F(x)$	41
2.4.4	$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(t)$, dreidim.; $\vec{F}(t)$ vorgeg.	43
2.4.5	$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$; $\vec{F}(\vec{x})$ gegebenes Kraftfeld	43
2.5	Lösen von Differentialgleichungen mit MAPLE	44
2.5.1	Literatur zu Maple	45
2.5.2	Literatur zu gewöhnlichen Differentialgleichungen	47
3	Schwingungsprobleme, lineare Dgl.	48
3.1	Beispiele linearer Differentialgleichungen	48
3.2	Inhomogene und homogene Gleichungen	49
3.3	Freie Schwingungen	53
3.3.1	Ungedämpfte Schwingung	53
3.3.2	Gedämpfte Schwingung	54
3.4	Erzwungene gedämpfte Schwingung	57
3.4.1	Antrieb harmonisch	58
4	Das Zweikörperproblem	64
4.1	Einleitende Bemerkungen	64
4.2	Die Gleichungen des Zweikörperproblems. Integrationskonstanten	66
4.3	Schwerpunktkoordinaten, Impulserhaltung	67

4.4	Drehimpulserhaltung	71
4.5	Kinetische Energie, Potential, Totalenergie	73
4.6	Die innere Bewegung : Polarkoordinaten	75
4.6.1	Das effektive Potential: Reduktion auf ein 1-dimensionales Problem	78
4.6.2	Die Bahn (allgemein, $V(x)$ beliebig)	81
4.6.3	Die Bahnen im Potential $V(x) = -\lambda/x$	83
4.6.4	Diskussion: Bahnkurven aus Anfangsbedingungen	84
4.6.5	Planetenbewegung: die Zeitgleichung	86
4.6.6	Planetenbewegung: die Keplerschen Gesetze	88
A	Geometrie der Ellipse, Parabel und Hyperbel	91
A.1	Darstellung in der Form $f(x, y) = 0$	91
A.2	Polardarstellung	91
5	Das Relativitätsprinzip	96
5.1	Postulate der klassischen Mechanik	96
5.2	Universale Zeit – Universale Lichtgeschwindigkeit	97
5.3	Dopplereffekt	98
5.4	Zeitdilatation	100
5.5	Addition paralleler Geschwindigkeiten, c als Grenzgeschwindigkeit	102

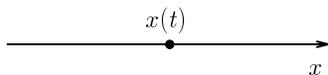
6	Energie und Impuls in der Relativitätstheorie	105
6.1	Neutrale π -Mesonen	105
6.2	Masse und Energie	107
6.3	Impuls	110
6.4	Massenschale	114
6.4.1	Nichrelativistische Näherungen	115
6.5	Teilchen der Masse 0: Photonen, Neutrinos	116
6.6	Zweikörperzerfälle	117
6.7	Teilchenerzeugung	119
7	Die Lorentztransformation	123
7.1	Linearität der Transformation zwischen Inertialsystemen	123
7.2	Lorentztransformation für Ereignisse auf der x -Achse	124
7.3	Diskussion der Lorentztransformation	129
7.4	Lorentztransformation beliebiger Ereignisse	135
7.5	Transformation zwischen zwei beliebigen IS	137
7.6	Poincarégruppe	139
7.7	Galileitransformationen	140
B	Linearität der Abbildung zwischen IS	143
B.1	Zur Linearität der Abbildung zwischen IS	143

B.2	Spezielle Lorentztransformation in Richtung der ersten Achse . . .	144
8	Minkowskische Geometrie	147
8.1	Ereignisraum	147
8.2	Zweidimensionale Welt, Lorentztransformationen als hyperbolische Drehungen	148
8.3	Minkowskische Distanz in der zweidimensionalen Welt	149
8.4	Minkowskische Distanz beliebiger Ereignisse	151
8.5	Eigenzeit, ideale Uhr, Zwillingsparadoxon	152
8.6	Metrischer Tensor	155
8.7	Vierergeschwindigkeit	156
8.8	Viererimpuls	159
C	Orthogonale und Pseudoorthogonale Transformationen	163

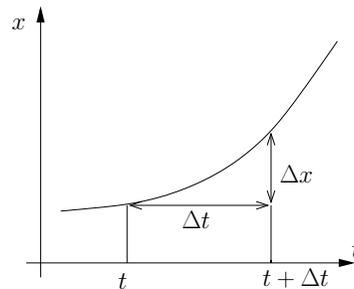
1 Kinematik und Mechanik des Massenpunktes

1.1 Bewegungen in einer Dimension

1.1.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung



Bei der Bewegung eines Massenpunktes längs einer festen Geraden trägt die Funktion $x = x(t)$ die vollständige Information über den Bewegungsablauf. Daraus leiten sich Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ ab. Die *mittlere* Geschwindigkeit in einem Intervall $[t, t + \Delta t]$ beträgt



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad (1.1)$$

die *momentane* Geschwindigkeit zur Zeit t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t). \quad (1.2)$$

Der Punkt im Symbol \dot{x} stellt eine geläufige Symbolik für die Ableitung nach der Zeit dar.

Die *mittlere* Beschleunigung in einem Intervall $[t, t + \Delta t]$ beträgt

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}, \quad (1.3)$$

die *momentane* Beschleunigung zur Zeit t

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) \\ &= \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.1.2 Gleichförmig beschleunigte Bewegung : $\ddot{x}(t) = a_0$

Die Beschleunigung $a(t) = a_0$ ist als konstant vorausgesetzt.

Integration der Differentialgleichung für $v(t)$ ergibt (mit der Integrationskonstanten v_0) :

$$\frac{dv(t)}{dt} = a_0 \quad \rightarrow \quad v(t) = v_0 + a_0 t . \quad (1.5)$$

Die Integration der Bewegungsgleichungen für $x(t)$ ergibt (mit der Integrationskonstanten x_0) :

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_0 + a_0 t \quad \rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 . \quad (1.6)$$

Kommentar: Die Funktion $x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$ stellt die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = a_0 = \textit{konstant}$ dar. Dabei handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Neben vorgegebenen Konstanten (a_0) und der unabhängigen Variablen (t) kommen in der allgemeinen Lösung zwei freie Parameter, die sog. Integrationskonstanten, vor (v_0, x_0). Die allgemeine Lösung besteht also in diesem Fall aus einer 2-parametrischen Schar von einzelnen Lösungen. Die Integrationskonstanten sind durch die Differentialgleichung allein nicht festgelegt; dies entspricht der Freiheit, dass der Anfangsort $x(0) = x_0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$ frei vorgegeben werden können; die zeitliche Fortsetzung ist dann durch die Beschleunigung $\ddot{x} = a_0$ festgelegt. Mit der Vorgabe von x_0, v_0 wird aus der allgemeinen Lösung eine *bestimmte* Lösung.

1.1.3 Taylor-Entwicklung

Die Taylor-Entwicklung von $x(t)$ um einen Zeitpunkt t_0 herum lautet

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}(t_0) (\Delta t)^2 + \dots . \quad (1.7)$$

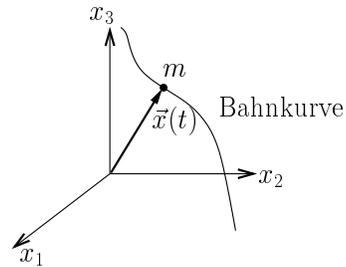
Lässt man die höheren Terme weg, spricht man von der *Taylor-Näherung* zweiter Ordnung; sie entspricht der Fortsetzung der Bewegung, die sich mit gleichbleibender Beschleunigung $\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t_0)$ ergeben würde.

1.2 Bewegung im 3-dimensionalen Raum: Ortsvektor, Bahnkurve

Ortsvektor als Funktion der Zeit:

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

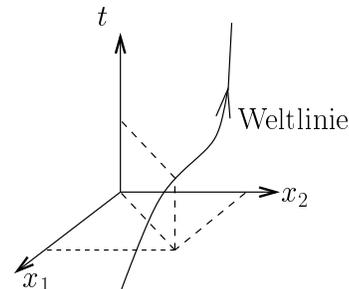
Die Kenntnis der drei Funktionen $x_k(t)$ stellt die vollständige Information über die Bewegung des Massenpunktes dar.



Beispiele :

- Kreisbewegung: $\vec{x}(t) = R(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$.
- Geradlinige gleichförmige Bewegung: $\vec{x}(t) = \vec{a} + \vec{b}t$.

Anstelle der Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{x}(t)$ im dreidimensionalen Raum kann die Bewegung auch als Kurve in einem vierdimensionalen Raum mit t als vierter Achse dargestellt werden: *Weltlinie*. (Hier Figur für einen zweidimensionalen Ortsraum).

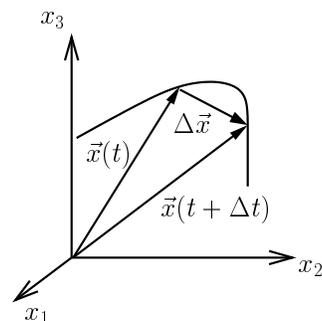


1.3 Geschwindigkeit

Die Bewegung $\vec{x}(t)$ sei bekannt. Die mittlere Geschwindigkeit zwischen t und $t + \Delta t$ ist

$$\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} .$$

In der Grenze $\Delta t \rightarrow 0$ ergibt sich die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t :



$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \dot{\vec{x}}. \quad (1.8)$$

Der Grenzübergang kann komponentenweise ausgeführt werden, z.B.:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_1(t + \Delta t) - x_1(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{x}_1 \\ \vec{v}(t) &= \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right) = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Zur geometrischen Deutung (siehe obige Figur): der Vektor $\vec{v}(t)$ hat die Richtung der Tangente im Punkt $\vec{x}(t)$. Der Betrag $|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ misst das Tempo, mit welchem dieser Punkt durchlaufen wird.

Die Geschwindigkeit liefert den Term erster Ordnung in der Taylor-Entwicklung

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \vec{x}(t) + \Delta t \cdot \vec{v}(t) + \dots \quad (1.10)$$

(man stelle sich t fest und Δt variabel vor). Im nächsten Term in dieser Entwicklung wird die Beschleunigung zum Zeitpunkt t als Koeffizient vorkommen.

1.1 Übung

Bilde die Geschwindigkeit in den oben gegebenen beiden Beispielen von Bewegungen.

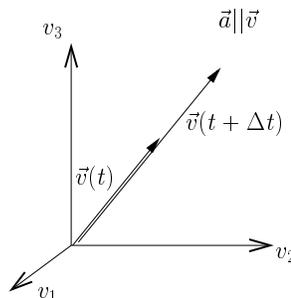
1.4 Beschleunigung

Die nochmalige Ableitung von $\vec{x}(t)$ nach der Zeit ergibt die Beschleunigung zum Zeitpunkt t (Geschwindigkeitsänderung pro Zeit) :

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) \\ &= \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{x}}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t)). \end{aligned} \quad (1.11)$$

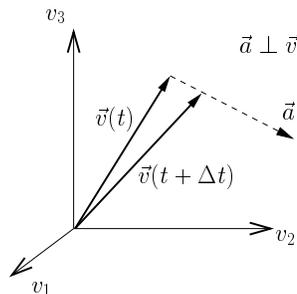
Beispiele:

-Änderung des Geschwindigkeitsbetrages ohne Änderung der Richtung der Geschwindigkeit (geradlinige Bewegung). Die Figur zeigt $\vec{v}(t)$ im Geschwindigkeitsraum.



-Bewegung mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag (Beispiel: Bewegung eines Elektrons in einem Magnetfeld \vec{B} ; $\vec{E} = 0$). Die Beschleunigung ist senkrecht zur Geschwindigkeit:

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(t)^2 = 0, \quad \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = 0.$$



1.5 Gleichförmige Bewegung : $\vec{a} = 0$

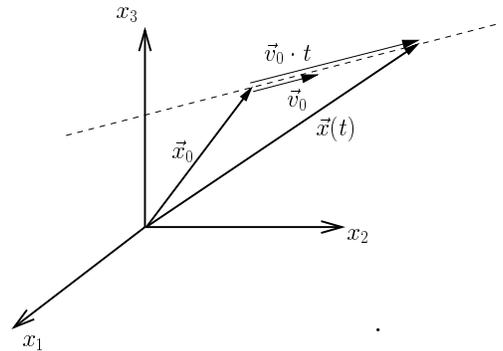
Eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit (Richtung und Betrag) heisst gleichförmig :

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 = \text{konst.} \\ \vec{a} &= 0. \end{aligned}$$

Integration:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}(t)}{dt} &= \vec{v}_0 ; \text{ Differentialgleichung für } \vec{x}(t) \\ \frac{dx_k(t)}{dt} &= v_{0k} ; \text{ komponentenweise; } k = 1, 2, 3 \\ x_k(t) &= x_{0k} + v_{0k} t ; \text{ Integration} \\ \vec{x}(t) &= \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t ; \text{ vektorielles Resultat} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Die Bahnkurve ist eine Gerade:



1.6 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$ ist als konstant vorausgesetzt (Richtung und Betrag):

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{a}_0 = \text{konstant} . \quad (1.13)$$

Integration der Differentialgleichung für die Geschwindigkeit (mit den Integrationskonstanten $\vec{v}_0 = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$) :

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}_0 \quad \rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t . \quad (1.14)$$

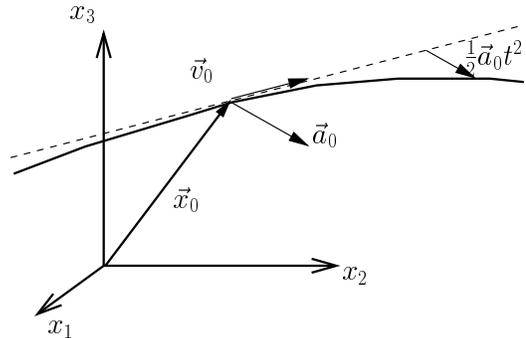
Die Integration der Bewegungsgleichungen für $x_k(t)$ ergibt (mit den Integrationskonstanten $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$):

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t ,$$

$$\frac{dx_k}{dt} = v_{0k} + a_{0k} t ,$$

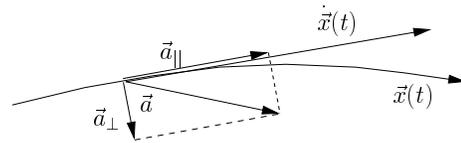
$$x_k(t) = x_{0k} + v_{0k} t + \frac{1}{2} a_{0k} t^2 ,$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 .$$



Hier waren die drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung (1.13) zu lösen. Die allgemeine Lösung enthält 6 Integrationskonstanten. Diese sind z.B. durch die Angabe von Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ festgelegt: $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ (mit diesen Angaben gibt es genau eine Lösung).

Die Beschleunigung \vec{a}_{\parallel} in Richtung der Geschwindigkeit verändert den Betrag der Geschwindigkeit, die Komponente \vec{a}_{\perp} verändert die Richtung der Geschwindigkeit.



Übungen zur gleichförmig beschleunigten Bewegung ($\vec{x}_0, \vec{v}_0, \vec{a}_0$ gegeben):

1.2 Übung

Begründe, weshalb die Bewegung in einer Ebene verläuft.

1.3 Übung

Begründe mithilfe geeigneter Manipulationen der Vektorrechnung, dass die Bahnkurve eine Symmetrie hat. Wo ist der Scheitel der Bahnkurve?

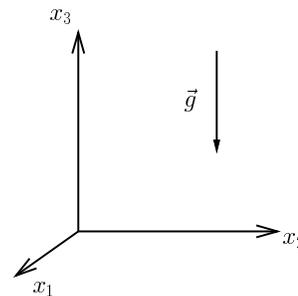
1.4 Übung

Verschwindet die Änderung des Geschwindigkeitsbetrages $|\vec{v}|$ zu irgendeinem Zeitpunkt?

1.7 Bewegungen im Schwerfeld der Erde

Das Schwerfeld der Erde bewirkt in der Nähe der Erdoberfläche in erster Näherung konstante Beschleunigung:

$$\vec{a} = \vec{g} = (0, 0, -g) ; \quad g = 9.81 \text{ m s}^{-2} .$$



Wir diskutieren Bahnen, welche zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $\vec{x}_0 = (0, 0, h)$ beginnen.

a) Freier Fall : $\vec{v}_0 = 0$

$$x_1(t) = 0 ; \quad x_2(t) = 0 ; \quad x_3(t) = h - g t^2 / 2$$

$$\text{Fallzeit } T : \quad x_3(T) = 0 \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

b) Vertikaler Wurf : $\vec{v}_0 = (0, 0, v_0)$

$$x_1(t) = 0 \quad ; \quad x_2(t) = 0 \quad ; \quad x_3(t) = h + v_0 t - g t^2 / 2$$



1.5 Übung

Leite die Formel

$$T_{\pm} = \frac{1}{g} \left[v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh} \right]$$

für die Fallzeit T bis $x_3 = 0$ her. Wieso gibt es zwei Lösungen? Diskutiere T_+ in den Grenzen $v_0 \rightarrow \infty$, $v_0 \rightarrow -\infty$.

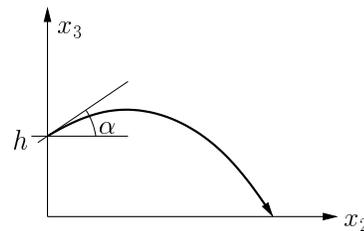
c) Schiefer Wurf : $\vec{v}_0 = (0, v_{02}, v_{03})$

$$x_1(t) = 0 \quad ; \quad x_2(t) = v_{02} t \quad ; \quad x_3(t) = h + v_{03} t - g t^2 / 2$$

Überlagerung einer horizontalen gleichförmigen Bewegung mit einer vertikalen gleichförmig beschleunigten Bewegung.

1.6 Übung

h und $|\vec{v}_0|$ seien gegeben. Ist für eine möglichst grosse Wurfweite ein Wurfwinkel α von mehr oder von weniger als 45° günstiger?



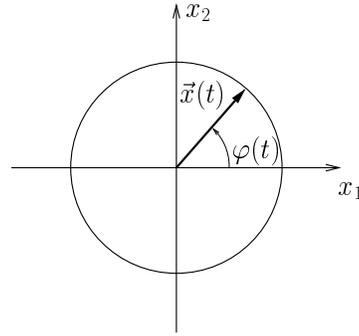
1.8 Gleichförmige Kreisbewegung

Wir betrachten im folgenden eine Kreisbewegung in der (x_1, x_2) -Ebene.

Wenn der überstrichene Winkel $\varphi(t)$ *linear* mit der Zeit zunimmt, spricht man von einer gleichförmigen Kreisbewegung:

$$\varphi(t) = \omega t .$$

ω bezeichnet die Zunahme des Winkels φ pro Zeit und heisst *Winkelgeschwindigkeit*.



Die Umlaufzeit T beträgt

$$T = 2\pi/\omega . \quad (1.15)$$

ν bezeichnet die Anzahl Umläufe pro Zeit (Umlauffrequenz):

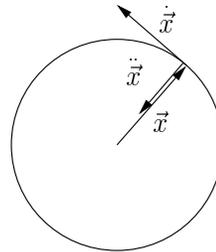
$$\nu = T^{-1} = \frac{\omega}{2\pi} . \quad (1.16)$$

Die Komponenten der Bewegung:

$$\vec{x}(t) = R (\cos \omega t, \sin \omega t, 0) ,$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = R \omega (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0) ,$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -R \omega^2 (\cos \omega t, \sin \omega t, 0) .$$



Hieraus lassen sich die folgenden Beziehungen ablesen:

$$\begin{aligned} |\vec{x}| &= R , \\ \ddot{\vec{x}} &= -\omega^2 \vec{x} , \\ \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} &= 0 , \\ v &= |\dot{\vec{x}}| = R \omega , \\ a &= |\ddot{\vec{x}}| = R \omega^2 = \frac{v^2}{R} . \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.9 Taylor-Entwicklung

Wir betrachten die Bewegung $\vec{x}(t)$ in der Umgebung eines festen Zeitpunktes t . Die Taylor-Entwicklung um den Zeitpunkt t lautet:

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \vec{x}(t) + \Delta t \dot{\vec{x}}(t) + \frac{1}{2!}(\Delta t)^2 \ddot{\vec{x}}(t) + \frac{1}{3!}(\Delta t)^3 \overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{x}}(t) + \dots \quad (1.18)$$

Dabei denkt man sich t festgehalten und Δt variabel. Bricht man die unendliche Reihe zum Beispiel nach dem Term zweiter Ordnung ab, so erhält man die *Taylor-Näherung* zweiter Ordnung; sie entspricht der gleichförmig beschleunigten Bewegung, welche sich mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t)$ und der konstant bleibenden Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}(t)$ (bei festem Wert t) ergeben würde. Bei welcher Ordnung abgebrochen werden darf, hängt von der Anwendung ab - z.B. genügt für die Bestimmung der exakten Bahnkrümmung in $\vec{x}(t)$ die zweite Ordnung (Nächster Abschnitt).

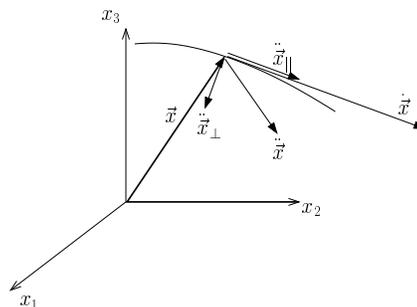
1.7 Übung

Berechne und zeichne die Taylor-Näherungen der Kreisbewegung $\vec{x}(t) = R (\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$ um den Punkt $t = 0$ in erster und zweiter Ordnung.

1.10 Differentialgeometrie der Bahnkurve

Aus $\vec{x}(t)$ ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{x}}(t)$ (tangential zur Bahnkurve). Der Beschleunigungsvektor $\ddot{\vec{x}}(t)$ legt folgende Größen fest:

- die momentane Änderung von $|\dot{\vec{x}}|$
- die momentane Bahnebene
- die momentane Krümmung der Bahn.



1.10.1 Änderung des Geschwindigkeitsbetrages

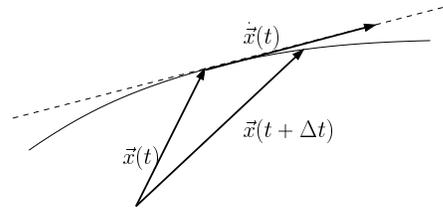
$$\frac{d}{dt} |\dot{\vec{x}}| = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}} (2\dot{x}_1\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_2\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_3\ddot{x}_3) \\
&= \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} \quad ; \quad \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} \text{ ist der Einheitsvektor in Richtung } \dot{\vec{x}} \\
&= \pm |\ddot{\vec{x}}_{\parallel}| \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Die Komponente $\ddot{\vec{x}}_{\parallel}$ der Beschleunigung in Richtung der Geschwindigkeit bestimmt die Änderung des Geschwindigkeitsbetrages pro Zeit.

1.10.2 Momentane Bahnebene

$\Sigma(t, \Delta t)$ bezeichne die Ebene, welche zu einem bestimmten Zeitpunkt t durch $\dot{\vec{x}}(t)$ und durch den Bahnpunkt $\vec{x}(t + \Delta t)$ aufgespannt ist. Die momentane Bahnebene $\Sigma(t)$ (zum Zeitpunkt t) entsteht durch den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$.



Der Normalenvektor \vec{n} zu $\Sigma(t, \Delta t)$ hat die Richtung des Produktes $\dot{\vec{x}}(t) \times [\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)]$. Mit der Taylorreihe (1.18) ergibt sich für dieses Produkt die Entwicklung

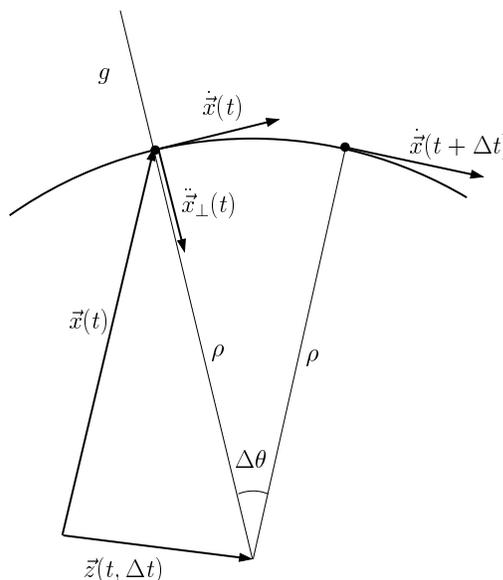
$$\begin{aligned}
\vec{n} &\sim \dot{\vec{x}}(t) \times [\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)] = \dot{\vec{x}}(t) \times \left[\dot{\vec{x}}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{x}}(t) (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \ddot{\vec{x}}(t) (\Delta t)^3 + \dots \right] \\
\vec{n} &\sim \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \dot{\vec{x}} \times \left[\ddot{\vec{x}} + \frac{\Delta t}{3} \ddot{\vec{x}} + \dots \right]. \tag{1.20}
\end{aligned}$$

In der Grenze $\Delta t \rightarrow 0$ wird die Richtung \vec{n} gleich der Richtung von $\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}$: die momentane Bahnebene $\Sigma(t)$ geht durch den Punkt $\vec{x}(t)$ und wird durch die beiden Richtungen $\dot{\vec{x}}(t)$, $\ddot{\vec{x}}(t)$ aufgespannt (oder durch die orthogonalen Richtungen $\dot{\vec{x}}(t)$, $\ddot{\vec{x}}_{\perp}(t)$).

1.10.3 Krümmungszentrum, Krümmungsradius

Die Bewegung $\vec{x}(t)$ in der Umgebung des Zeitpunktes t lässt sich durch einen Kreis mit einem momentanen Krümmungszentrum \vec{z} und einem momentanen Krümmungsradius $\varrho(t) = |\vec{x}(t) - \vec{z}(t)|$ approximieren; dieser Kreis liegt in der oben eingeführten momentanen Bahnebene.

Exakte Definition: die Richtung von $\ddot{\vec{x}}_{\perp}(t)$ legt eine Gerade g durch den Punkt $\vec{x}(t)$ fest (sie liegt in der momentanen Bahnebene). Auf dieser Geraden suchen wir vorerst den Punkt $\vec{z}(t, \Delta t)$, welcher gleich weit von $\vec{x}(t)$ wie von $\vec{x}(t + \Delta t)$ entfernt ist. Das momentane Krümmungszentrum ergibt sich in der Grenze $\Delta t \rightarrow 0$: $\vec{z}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{z}(t, \Delta t)$.



1.8 Übung

Man führe dieses Verfahren mithilfe der Taylor Entwicklung aus. Dabei erhält man für $\varrho(t)$ die unten angegebene Formel (1.21).

Da die Manipulationen mit Taylorreihen gelegentlich etwas Mühe bereiten, führen wir die Übung durch:

Aus der Information im obigen Text können wir sofort zwei Gleichungen formulieren:

$$\vec{z}(t, \Delta t) = \vec{x}(t) + \underbrace{\frac{\ddot{\vec{x}}_{\perp}(t)}{|\ddot{\vec{x}}_{\perp}(t)|}}_{\vec{n}_{\perp}(t)} \varrho(t, \Delta t) \quad ; \quad |\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{z}(t, \Delta t)| \stackrel{!}{=} \varrho(t, \Delta t)$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite ergibt:

$$|\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t) - \vec{n}_{\perp}(t) \varrho(t, \Delta t)| = \varrho(t, \Delta t)$$

Quadrieren ergibt

$$[\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)]^2 - 2 [\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)] \cdot \vec{n}_\perp(t) \varrho(t, \Delta t) + \varrho(t, \Delta t)^2 = \varrho(t, \Delta t)^2$$

In dieser Gleichung entwickeln wir $\vec{x}(t + \Delta t)$ nach Potenzen von Δt und berücksichtigen nur Terme bis zur Ordnung $(\Delta t)^2$ explizit:

$$\begin{aligned} & \underbrace{[\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)]^2}_{\dot{\vec{x}}^2(t) (\Delta t)^2} - 2 \underbrace{[\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)] \cdot \vec{n}_\perp(t)}_{\dot{\vec{x}}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{x}}(t) (\Delta t)^2} \varrho(t, \Delta t) = 0 \\ & \dot{\vec{x}}^2(t) (\Delta t)^2 - 2 \left[\dot{\vec{x}}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{x}}(t) (\Delta t)^2 \right] \cdot \vec{n}_\perp(t) \varrho(t, \Delta t) + O((\Delta t)^3) = 0 \\ & \dot{\vec{x}}^2(t) (\Delta t)^2 - \ddot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{n}_\perp(t) \varrho(t, \Delta t) (\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3) = 0 \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang von der zweitletzten zur letzten Zeile verwendet haben, dass $\dot{\vec{x}}(t) \perp \vec{n}_\perp(t)$. Nun entwickeln wir auch $\varrho(t, \Delta t)$ und berücksichtigen nach wie vor nur Terme bis zur Ordnung $(\Delta t)^2$ explizit:

$$\dot{\vec{x}}^2(t) (\Delta t)^2 - \ddot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{n}_\perp(t) \underbrace{\varrho(t, 0)}_{\equiv \varrho(t)} (\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3) = 0$$

Die Koeffizienten von $(\Delta t)^n$ müssen alle verschwinden [\leftrightarrow Identitätssatz von Potenzreihen], insbesondere der $(\Delta t)^2$ -Term:

$$\begin{aligned} \varrho(t) &= \frac{\dot{\vec{x}}^2(t)}{\ddot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{n}_\perp(t)} = \frac{\dot{\vec{x}}^2(t)}{(\ddot{\vec{x}}_\perp(t) + \ddot{\vec{x}}_\parallel(t)) \cdot \frac{\ddot{\vec{x}}_\perp(t)}{|\ddot{\vec{x}}_\perp(t)|}} \\ \varrho(t) &= \frac{\dot{\vec{x}}^2(t)}{\frac{\ddot{\vec{x}}_\perp^2(t)}{|\ddot{\vec{x}}_\perp(t)|}} = \frac{\dot{\vec{x}}^2(t)}{|\ddot{\vec{x}}_\perp(t)|} \quad \text{Ende der Übung.} \end{aligned}$$

Für den momentanen Krümmungsradius $\varrho(t)$ erhalten wir somit:

$$\varrho(t) = \frac{\dot{\vec{x}}^2(t)}{|\ddot{\vec{x}}_\perp(t)|}. \quad (1.21)$$

Die Grösse $\kappa = \varrho^{-1}$ wird als *Krümmung* bezeichnet.

1.9 Übung

$\vec{x}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, vt)$. R, ω, v konstant. Bestimme zum Zeitpunkt $t = 0$: momentane Bahnebene, Krümmungszentrum, Krümmungsradius.

1.10 Übung

Bewegung im Magnetfeld: $m\ddot{\vec{x}} = q\dot{\vec{x}} \times \vec{B}$. $\ddot{\vec{x}}_\parallel$? $\ddot{\vec{x}}_\perp$? ϱ ? κ ? momentane Bahnebene?

1.11 Masse

Bisher war nur von Kinematik die Rede: Bewegungen wurden beschrieben, ohne nach den Bedingungen ihrer Entstehung zu fragen. In den folgenden Abschnitten kommen die eigentlichen physikalischen Begriffe der Mechanik, wie Kraft und Masse, dazu. [Ein klassisches Werk zur Geschichte und Erkenntnistheorie der Begriffe der Mechanik ist: Ernst Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 8.Aufl., Verlag Brockhaus, Leipzig 1921.]

Die Masse eines Systems (Elementarteilchen, Stein, ..) äussert sich in zwei ganz verschiedenen Aspekten: Einerseits als Mass für die Trägheit und andererseits als Mass für die Kopplungsstärke an ein Gravitationsfeld.

Träge Masse: Sie ist charakterisiert durch die Gleichung

$$\text{Beschleunigung} = \text{Kraft} / \text{träge Masse.}$$

Erzeugt eine gegebene beschleunigende Kraft (z.B. bestimmte Spannung einer Einheitsfeder) nur eine geringe Beschleunigung a des Objektes, so wird diesem eine grosse träge Masse zugeschrieben.

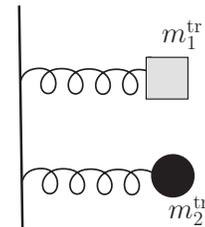
$$\text{Falls also } a_1 < a_2 \quad \longrightarrow \quad m_1^{\text{tr}} > m_2^{\text{tr}}.$$

$$\text{Genauer: } \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2^{\text{tr}}}{m_1^{\text{tr}}}$$

Erzeugt dieselbe Kraft bei zwei Objekten dieselbe Beschleunigung, so sind ihre trägen Massen gleich.

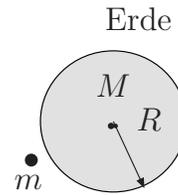
Man kann somit einem bestimmten Klotz die Masse $m^{\text{tr}} = 1\text{kg}$ zuordnen. Die träge Masse jedes anderen Körper ist dann festgelegt.

Schwere Masse: Sie ist massgebend für das Gewicht eines Körpers, d.h. für die Gravitationskraft, mit welcher dieser von der Erde angezogen wird. Sind zwei Objekte auf einer Balkenwaage im Gleichgewicht, so sind ihre schweren Massen gleich.



Gewicht F_G eines Körpers ist proportional zu seiner sog. schweren Masse. Für einen Körper auf der Erdoberfläche gilt:

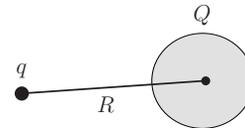
$$F_G = m^{\text{schwer}} \frac{MG}{R^2}$$



m^{schwer} : Mass für die Kopplungsstärke an ein Gravitationsfeld: "Gravitationsladung"

Vergleiche mit dem Coulombgesetz [q : Ladung, die sich im el. Feld bewegt, das von Q erzeugt wird]:

$$F_{\text{elektrisch}} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$



Zusammenhang zwischen träger und schwerer Masse: Es gibt im Rahmen der klassischen Physik keinen Grund, weshalb zwei Objekte mit gleicher träger Masse auch gleiches Gewicht (resp. gleiche schwere Masse) haben sollten.

Es ist aber eine empirische Tatsache, dass im Gravitationsfeld (z. B. der Erde) alle Körper dieselbe Fallbeschleunigung a haben.

Betrachte einen freifallenden Körper, charakterisiert durch m^{tr} und m^{schwer} in der Nähe der Erdoberfläche. Es gilt:

$$m^{\text{tr}} a = m^{\text{schwer}} \frac{MG}{R^2} \quad \longrightarrow \quad a = \frac{m^{\text{schwer}}}{m^{\text{tr}}} \frac{MG}{R^2}.$$

Wegen der obigen empirischen Tatsache folgt, dass das Verhältnis $m^{\text{schwer}}/m^{\text{tr}}$ für jeden Körper gleich ist. Man kann sich demzufolge die Gravitationskonstante G so gewählt denken, dass $m^{\text{schwer}} = m^{\text{tr}}$ ist.

Für die träge und die schwere Masse eines Objektes genügt daher eine einzige Angabe, *die Masse*.

Die Gleichheit von träger und schwerer Masse ist heute empirisch mit einer Genauigkeit von ca 10^{-12} nachgewiesen. Historisch: Eötvös, Torsionswaage; Genauigkeit bis $5 \cdot 10^{-9}$ (1922). Newton, Pendel, 10^{-3} . Galilei, "alle Körper fallen gleich schnell". Über die Gleichheit von träger und schwerer Masse hat man sich erst in neuerer Zeit verwundert. In der Einstein'schen Gravitationstheorie findet die

Gleichheit der Fallbeschleunigung aller Objekte Ausdruck im Äquivalenzprinzip (siehe Vorlesung über allgemeine Relativitätstheorie).

Nach der speziellen Relativitätstheorie tragen über die Ruhemassen hinaus auch sämtliche innere Energien (kinetische und potentielle) zur Masse eines Körpers bei: Masse eines Atomkernes = Summe der Ruhemassen der Protonen und Neutronen - Bindungsenergie / c^2 ; Wasser, bestehend aus 10^{23} Wassermolekülen, hat bei 100°C mehr Masse als bei 20°C .

1.12 Bewegungsgesetz, Kraft

Grundlage der Mechanik: die auf einen Massenpunkt einwirkenden Kräfte legen dessen Beschleunigung fest,

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) . \quad (1.22)$$

Die Beschleunigung, welche der Massenpunkt zu einem Zeitpunkt t erfährt, kann von verschiedenen Grössen abhängen:

- von der momentanen Position des Massenpunktes (Satellit: Ort im Schwerfeld der Erde),
- von der momentanen Geschwindigkeit (Lorentzkraft),
- explizite von der Zeit t (Elektron in einem vorgegebenen elektrischen Wechselfeld),
- von der ganzen Situation und deren weiteren Parametern.

Beim Bewegungsgesetz Gl. (1.22) handelt es sich um drei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die drei unbekannt Funktionen $x_k(t)$ (*gewöhnlich*: die unbekannt Funktionen hängen nur von einer einzigen Variablen, nämlich t , ab). Die wesentlichste (mathematische) Folgerung aus dieser Form ist im folgenden Satz zusammengefasst:

Satz: Ist die Funktion $\vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ gegeben, und sind ferner Ort und Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t_0 vorgegeben (z.B. zum Zeitpunkt $t_0 = 0$), dann ist die Bewegung $\vec{x}(t)$ eindeutig festgelegt.

Dieser mathematische Satz - oder seine allgemeinere Version im Kontext von Sy-

systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen - setzt selbstverständlich voraus, dass die Funktion \vec{f} bzw. die Funktionen f_k gewisse (milde) Voraussetzungen erfüllen. Intuitiv ist der Satz von der physikalischen Anschauung her klar:

Die Differentialgleichung $\ddot{\vec{x}} = \vec{f}$ kann man umschreiben in ein System von zwei DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = \vec{f} \end{cases} \quad (1.23)$$

Für ein kleines Zeitintervall Δt kann man dies schreiben als

$$\begin{cases} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} \approx \vec{v}(t) \\ \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \approx \vec{f}(\vec{x}, \vec{v}(t), t) \end{cases} \quad (1.24)$$

oder als

$$\begin{cases} \vec{x}(t + \Delta t) \approx \vec{x}(t) + \vec{v}(t) \Delta t \\ \vec{v}(t + \Delta t) \approx \vec{v}(t) + \vec{f}(\vec{x}, \vec{v}(t), t) \Delta t \end{cases} \quad (1.25)$$

Die Veränderungen von Ort und Geschwindigkeit sind also in jedem kleinen Zeitintervall eindeutig festgelegt. Dies kann man auf grössere Zeitintervall ausdehnen:

- Falls $\vec{x}(t)$, $\vec{v}(t)$ bekannt sind, dann auch $\vec{x}(t + \Delta t)$ und $\vec{v}(t + \Delta t)$.
- Falls $\vec{x}(t + \Delta t)$, $\vec{v}(t + \Delta t)$ bekannt sind, dann auch $\vec{x}(t + 2\Delta t)$ und $\vec{v}(t + 2\Delta t)$, etc.

Das angedeutete Verfahren definiert das Rezept für die (numerische) Lösungskonstruktion. Mehr dazu, siehe Abschnitt 2.2.2.

Es ist üblich, das Bewegungsgesetz in der Form

$$m \ddot{\vec{x}} = \vec{F} \quad ; \quad \vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \quad (1.26)$$

zu schreiben ($\vec{F} = m \vec{f}$), und \vec{F} als *Kraft* zu bezeichnen, die auf den Massenpunkt einwirkt. Die Beobachtung der Bewegung des Massenpunktes zeigt die einwirkende Kraft auf. Die Grösse \vec{F} hat einfachere Eigenschaften als \vec{f} - z.B. actio = reactio.

Soll man das Bewegungsgesetz als Definition der Kraft auffassen? (Kraft ist alles, was Beschleunigung erzeugt). Soll man statt dessen einen unabhängigen Kraftbegriff einführen (Statik, Federn)? Soll man von der Energie ausgehen, und Kraft

als Grösse einführen, welche bei einer Verschiebung des Massenpunktes Arbeit leistet? Wer sich für Fragen dieser Art interessiert, findet im oben erwähnten Buch von E.Mach eine Fülle von Anregungen.

Hinweis: die hier formulierte Newton'sche Mechanik ist nur eine Näherung der exakteren relativistischen Mechanik. In der relativistischen Mechanik verändert die Kraft den Impuls \vec{p} eines Massenpunktes ($\vec{p} = \vec{F}$), aber der Impuls ist dort nicht $\vec{p} = m\vec{v}$, sondern $\vec{p} = m\vec{v} / \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$, wo c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet (siehe Kapitel 6.3).

Für die Mechanik grundlegend ist die Aussage, dass das Bewegungsgesetz auf die Form Gl. (1.26) gebracht werden kann. Die weiteren Aussagen über Kräfte, z.B.

- vektorielle Addition von Kräften
- actio = reactio
- schwere Masse = träge Masse

sind empirisch überprüfbar anhand der Bewegungen, welche die Kräfte bewirken.

1.13 Inertialsystem, Scheinkräfte

Es gibt Koordinatensysteme, in denen die Kraftgesetze einfach sind, und andere.

Beispiel: In einem beschleunigten Lift laufen Pendeluhren falsch. In einem rotierenden Labor hängen Pendel nicht parallel, und eine Kugel, welche man auf den Boden legt, rollt auf einer gekrümmten Bahn weg. Offenbar herrschen in diesem Labor Kräfte; mit den Gravitationskräften gemeinsam haben sie das Merkmal, proportional zur Masse des Punktes zu sein. Man nennt sie *Scheinkräfte*. Beispiele: Zentrifugalkraft, Corioliskraft.

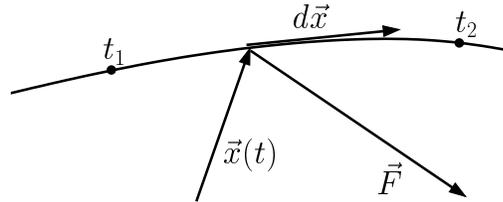
Es gibt ausgezeichnete Koordinatensysteme, in denen die Bewegung eines Massenpunktes, auf welchen keine *physikalischen* Kräfte einwirken, geradlinig gleichförmig erfolgt. Solche Koordinatensysteme heissen *Inertialsysteme*. Jedes Koordinatensystem, welches sich in bezug auf ein Inertialsystem gleichförmig und ohne Relativdrehung bewegt, ist ebenfalls ein Inertialsystem.

1.14 Arbeit, Energie

1.14.1 Mechanische Arbeit

Ein Massenpunkt bewegt sich unter dem Einfluss der Kraft \vec{F} auf einer Bahn. $d\vec{x}$ sei ein (infinitesimales) Intervall dieser Bewegung.

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t).$$



Definition: bei der Verschiebung um $d\vec{x}$ leistet die momentan wirkende Kraft \vec{F} am Massenpunkt die Arbeit

$$dA = d\vec{x} \cdot \vec{F}. \quad (1.27)$$

Zum Vorzeichen:

- Falls die Kraftkomponente \vec{F}_{\parallel} in Richtung der momentanen Geschwindigkeit zeigt, ist $dA > 0$. Der Geschwindigkeitsbetrag nimmt zu.
- Falls die Kraftkomponente \vec{F}_{\parallel} entgegengesetzt zur momentanen Geschwindigkeit zeigt, ist $dA < 0$. Der Geschwindigkeitsbetrag nimmt ab.

Die am Massenpunkt zwischen den Bahnpunkten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 geleistete Arbeit A_{12} setzt sich wie folgt in Geschwindigkeitsänderung um:

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{F} \quad , \quad \text{Linienintegral} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{F} = \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{x}} \cdot m\ddot{\vec{x}} = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} [(\dot{\vec{x}})^2] \\ &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2(t_2) - \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2(t_1). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Beachte:

- Das Linienintegral $\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{F}$ längs einer gegebenen Kurve C bedeutet auch dann die von \vec{F} bei der Verschiebung längs C geleistete Arbeit, wenn \vec{F} nicht die totale bewegende Kraft ist.
- Im obigen Satz (1.28) ist hingegen vorausgesetzt, dass \vec{F} die totale bewegende Kraft ist (wo?).

- Die Herleitung gilt auch dann, wenn \vec{F} von der Geschwindigkeit oder explizite von der Zeit abhängt.

Kommentar zu Linienintegralen (siehe MMP1-Vorlesung):

Zur Berechnung von Linienintegralen geht man wie folgt vor [um die Notation einfach zu halten, sei hier die Kraft \vec{F} nur vom Ort \vec{x} abhängig]:

- Für den Weg eine Parameterdarstellung wählen:

$$\vec{x} = \vec{x}(\lambda); \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

so, dass $\vec{x}(\lambda_1) = \vec{x}_1$ (Anfangspunkt) und $\vec{x}(\lambda_2) = \vec{x}_2$ (Endpunkt).

- Das Linienintegral ist dann definiert gemäss

$$\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{F} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \cdot \vec{F}[\vec{x}(\lambda)].$$

- In der Gleichung (1.28) ist der Parameter λ mit der Zeit t identifiziert.

1.14.2 Kinetische Energie

Mit der Definition der kinetischen Energie T

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 \tag{1.29}$$

lässt sich das obige Resultat in der Form

$$A_{12} = T(2) - T(1) \tag{1.30}$$

schreiben: die von der totalen bewegenden Kraft am Massenpunkt geleistete Arbeit äussert sich in der Änderung der kinetischen Energie. (Man beachte, dass über die Kraft keine Voraussetzung gemacht werden muss; insbesondere gilt der Satz auch dann, wenn die Kraft kein Potential besitzt).

1.11 Übung

Beweise algebraisch, dass die kinetische Energie konstant bleibt, wenn $\dot{\vec{x}} \cdot \vec{F} = 0$.
Beispiel?

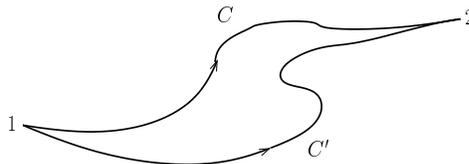
1.14.3 Potential

Wir betrachten zeitlich konstante, geschwindigkeitsunabhängige Kraftfelder

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}) . \quad (1.31)$$

Ein solches Kraftfeld heisst *konservativ*, wenn die Arbeit, welche das Feld bei Verschiebungen von \vec{x}_1 nach \vec{x}_2 leistet, unabhängig vom Weg ist, längs dessen die Verschiebung geschieht:

$$\int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{F} = \int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{F} .$$



Ist dies der Fall, dann definiert das Linienintegral für einen festen Startpunkt $\vec{x}_1 = \vec{a}$ eine Funktion, welche nur von den Endpunkten $\vec{x} = \vec{x}_2$ abhängt:

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{x}} d\vec{x}' \cdot \vec{F}(\vec{x}') = A(\vec{x}, \vec{a}) . \quad (1.32)$$

Die Grösse

$$V(\vec{x}) = -A(\vec{x}, \vec{a}) = A(\vec{a}, \vec{x}) \quad (1.33)$$

mit irgendeinem fest gewählten Punkt \vec{a} wird als *Potential* des Kraftfeldes (bezüglich \vec{a}) bezeichnet.

Da der Weg von \vec{x}_1 nach \vec{x}_2 auch über den Punkt \vec{a} geführt werden kann, gilt

$$\begin{aligned} A(\vec{x}_2, \vec{x}_1) &= A(\vec{x}_2, \vec{a}) + A(\vec{a}, \vec{x}_1) \\ &= A(\vec{x}_2, \vec{a}) - A(\vec{x}_1, \vec{a}) \\ &= -V(\vec{x}_2) + V(\vec{x}_1) . \end{aligned} \quad (1.34)$$

Die auf dem Weg von \vec{x}_1 nach \vec{x}_2 durch das Kraftfeld geleistete Arbeit ist also die Differenz der Potentiale in diesen Punkten.

1.12 Übung

Wählt man anstelle von \vec{a} einen anderen Bezugspunkt \vec{b} , so ändert sich die Potentialfunktion um eine additive Konstante. (Potentialdifferenzen bleiben gleich).

Für konservative Kräfte gilt also $A_{12} = -V(2) + V(1)$. Falls \vec{F} die resultierende Kraft ist, gilt ganz allgemein gemäss Gl. (1.30) auch $A_{12} = T(2) - T(1)$. Somit gilt konservative resultierende Kräfte

$$T(2) + V(2) = T(1) + V(1). \quad (1.35)$$

(Hier bedeutet V wieder das Potential der gesamten Kraft auf den Massenpunkt). Längs der Bahnkurve ist also die *totale Energie*

$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x}) \quad (1.36)$$

zeitlich konstant.

Aus der Darstellung des Potentials als Linienintegral der Kraft

$$V(\vec{x}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} d\vec{x}' \cdot \vec{F}(\vec{x}') \quad (1.37)$$

folgt für den Gradienten (siehe Kapitel 8.7 im Skript “Physik mit Mathematischen Methoden I” von T. Becher 2010)

$$\vec{\nabla} V(\vec{x}) = -\vec{F}(\vec{x}). \quad (1.38)$$

Oft ist es schwierig, direkt nachzuweisen, dass ein vorgegebenes Kraftfeld konservativ ist (und somit ein Potential besitzt), weil man gemäss Definition am Anfang dieses Abschnitts nachprüfen müsste, dass alle Linienintegrale wegunabhängig sind.

In den Mathematischen Methoden zur Physik II wird der Begriff der Rotation eines Vektorfeldes eingeführt werden. Die Rotation eines beliebigen Vektorfeldes $\vec{\omega}(\vec{x})$ ist definiert als

$$\text{rot}\vec{\omega}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{\omega}(\vec{x}) = (\partial_2\omega_3 - \partial_3\omega_2, \partial_3\omega_1 - \partial_1\omega_3, \partial_1\omega_2 - \partial_2\omega_1). \quad (1.39)$$

Aus dieser Definition sieht man, wie in der Notation angedeutet, dass die Rotation eines Vektorfeldes wieder ein Vektorfeld ist.

Man zeigt dann durch einfaches Ausrechnen, dass die Rotation eines beliebigen Gradientenfeldes verschwindet. Demzufolge kann ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ nur dann konservativ sein, wenn es rotationsfrei ist:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = 0. \quad (1.40)$$

In der Tat besagt ein Satz aus der Vektoranalysis, der im Detail in den math. Methoden besprochen wird, dass die folgenden vier Eigenschaften eines Vektorfeldes äquivalent sind:

- (i) Die Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{x})$ verschwindet im Gebiet G

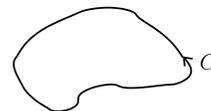
$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in G. \quad (1.41)$$

- (ii) Es existiert eine skalare Funktion $V(\vec{x})$ in G , so dass

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} V(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G. \quad (1.42)$$

- (iii) Das Linienintegral über jedem geschlossenen Weg, der ganz in G verläuft, verschwindet:

$$\oint d\vec{x} \cdot \vec{F} = 0, \quad C \in G.$$



- (iv) Das Linienintegral zwischen zwei Punkten $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in G$ ist unabhängig vom Weg (siehe Figur nach Gl. (1.31)):

$$C \int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{F} = C' \int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{F} \quad C, C' \in G. \quad (1.43)$$

Jede der vier Eigenschaften hat die drei anderen zur Folge. Konservative Kraftfelder können also z.B. auch durch die Eigenschaft (i) definiert werden. Diese Eigenschaft zeigt deutlich, dass nicht jedes Kraftfeld konservativ ist.

Auch zeitabhängige Kraftfelder besitzen ein (zeitabhängiges) Potential, wenn sie zu jedem festen Zeitpunkt rotationsfrei sind:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{F}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} V(\vec{x}, t) \quad (1.44)$$

\vec{F} heisst dann allerdings nicht konservativ.

1.13 Übung

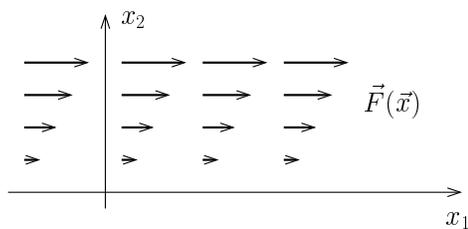
Sei $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}_0 = \text{konstant}$. $V(\vec{x})$? Die additive Konstante soll so gewählt werden dass $V(0) = 0$. Beispiel: $\vec{F}_0 = m \vec{g}$.

1.14 Übung

Sei $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$, \vec{a} konstant. Potential? Skizziere \vec{F} .

1.15 Übung

Kann das unten skizzierte Kraftfeld ein Potential besitzen?



1.16 Übung

Sei $\vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} f(|\vec{x}|)$, wobei die Funktion $f(|\vec{x}|)$ nur vom Abstand vom Ursprung abhängt und im übrigen beliebig vorgegeben sei.

- (a) Ist dieses Kraftfeld konservativ?
- (b) Ist $V(\vec{x})$ kugelsymmetrisch?
- (c) Wie bildet man $V(|\vec{x}|)$ aus $f(|\vec{x}|)$?
- (d) Wie lautet das Potential im Fall $\vec{F} = -D \vec{x}$ (ideale Feder)?
- (e) Weiteres Beispiel: Elektron im Coulombfeld des Protons (man denke sich das Proton fest im Ursprung des Koordinatensystems). Betrachte die Kraft auf das Elektron und skizziere das Potential.

1.17 Übung

Ein Satellit kreist um die Erde. Infolge Reibung mit der extrem dünnen Atmosphäre nimmt der Radius der Bahn ganz langsam ab. Ist es möglich, dass der Satellit dabei - trotz der Reibung - schneller wird?

1.18 Übung

Teilchen mit der Ladung q im Plattenkondensator, an welchem eine Wechselspannung anliegt. Ist das Kraftfeld konservativ? Existiert ein Potential? Verschwinden geschlossene Linienintegrale $\oint d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}, t)$, und welches ist die physikalische Bedeutung hiervon? Gilt der Energieerhaltungssatz in der Form "kinetische Energie plus Potential = konstant"?

2 Lösung spezieller Bewegungsgleichungen

In diesem Kapitel behandeln wir Bewegungen von Massenpunkten, so wie sie sich im eindimensionalen bzw. dreidimensionalen Raum aus

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F(x, \dot{x}, t), \\m\ddot{\vec{x}} &= \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit gegebenen Kraftfunktionen ergeben. Bei diesen Gleichungen handelt es sich um Differentialgleichungen. Wir streben eine exemplarische Einführung in typische Gleichungen und Probleme der Mechanik an.

2.1 Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

Eine Gleichung, welche neben einer unbekanntem Funktion auch Ableitungen dieser Funktion enthält, heisst *Differentialgleichung*. Falls die unbekanntem Funktion nur von einer einzigen Variablen abhängt, so spricht man von einer *gewöhnlichen Differentialgleichung*; hängt die unbekanntem Funktion von mehreren Variablen ab, und kommen in der Gleichung diese Funktion und ihre partiellen Ableitungen vor, so spricht man von einer *partiellen Differentialgleichung*.

Ein weiteres Merkmal ist die *Ordnung*; darunter versteht man die höchste Ordnung der vorkommenden Ableitungen.

Es können mehrere Funktionen zugleich unbekannt sein, welche dann zusammen mit ihren Ableitungen in mehreren Gleichungen vorkommen (*System* von Differentialgleichungen).

2.1.1 Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen

Unter der Normalform einer gewöhnlichen Differentialgleichung versteht man die Auflösung nach der höchsten Ableitung; zum Beispiel lauten die Normalformen von Differentialgleichung erster bzw. zweiter Ordnung für eine unbekanntem Funktion $f = f(t)$ allgemein

$$\dot{f} = A(f, t),\tag{2.2}$$

$$\ddot{f} = B(f, \dot{f}, t). \quad (2.3)$$

Wir betrachten hier ausschliesslich Differentialgleichungen, welche in der Normalform auf eindeutige rechte Seiten führen (Gegenbeispiel: $\dot{f}^2 + f^2 = 1$. Weshalb ist dies ein Gegenbeispiel?).

In der nachfolgenden Tabelle einige Beispiele von gewöhnlichen Differentialgleichungen für eine unbekannte Funktion $f(t)$; dabei sind a, A, b, B, \dots gegebene Konstanten oder gegebene Funktionen.

Differentialgleichung	Bezeichnung, Kommentar
$\dot{f}(t) = A[f(t), t]$	gewöhnliche DG 1.Ordnung; allgemeine Form
$\dot{f}(t) = af(t)$	gewöhnliche DG 1.Ordnung; linear, homogen, konstanter Koeff.
$\dot{f}(t) = af(t) + b$	gewöhnliche DG 1.Ordnung; linear, inhomogen, konstante Koeff.
$\dot{f}(t) = a(t)f(t) + b(t)$	gewöhnliche DG 1.Ordnung; linear, inhomogen
$\dot{f}(t) = f^2(t)$	gewöhnliche DG 1.Ordnung; Beispiel einer nichtlinearen Gleichung
$\ddot{f}(t) = A[f(t), \dot{f}(t), t]$	gewöhnliche DG 2.Ordnung; allgemeine Form
$\ddot{f}(t) = af(t) + b\dot{f}$	gewöhnliche DG 2.Ordnung; linear, homogen, konstante Koeff.
$\ddot{f}(t) = af(t) + b\dot{f} + c$	gewöhnliche DG 2.Ordnung; linear, inhomogen, konstante Koeff.
$\ddot{f}(t) = a(t)f(t) + b(t)\dot{f} + c(t)$	gewöhnliche DG 2.Ordnung; linear, inhomogen
$\ddot{f}(t) = \sin f(t) - \dot{f}^2$	gewöhnliche DG 2.Ordnung; Beispiel einer nichtlinearen Gleichung

Ein einfaches Beispiel eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die unbekanntenen Funktionen $x(t), v(t)$ ist

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -ax - bv \end{cases} \quad (2.4)$$

x stellt eine gedämpfte Schwingung in einer Dimension dar: x Ort, v Geschwindigkeit.

2.1.2 Beispiele von partiellen Differentialgleichungen

Ein Beispiel einer partiellen Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $\phi(x, y)$ von zwei Variablen ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = 0.$$

Es gibt beliebig viele Funktionen, welche diese Gleichung auf irgendeinem gegebenen Gebiet G der Ebene x, y erfüllen; schreibt man die Werte von ϕ auf dem Rand von G vor, so gibt es genau eine Lösung (Dirichletsches Problem, z.B. für ein kreisförmiges Gebiet, oder ein Rechteck). Diese Aufgabe tritt z.B. wie folgt in der Physik auf: gesucht ist die stationäre Temperatur $\phi(x, y)$ auf einem dünnen wärmeleitenden Blech (Gebiet G), wobei die Randwerte der Temperatur vorgegeben sind.

Andere partielle Differentialgleichungen der Physik sind z.B.

- Die Schrödingergleichung für die quantenmechanische Wellenfunktion $\psi(x, t)$ eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(x)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t).$$

- Die Maxwellgleichungen bilden ein System (4 Stück) von partiellen Differentialgleichungen für das elektromagnetische Feld $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$.

Partielle Differentialgleichungen kommen vor allem in folgenden Gebieten der Physik vor: Elektrodynamik, Quantenmechanik, (Quanten)Feldtheorie, Strömungsmechanik, etc.

In der Fortsetzung betrachten wir ausschliesslich gewöhnliche Differentialgleichungen, da in der Punktmechanik nur solche auftreten.

2.2 Differentialgleichungen erster Ordnung

2.2.1 Ein einfaches Beispiel: $\dot{v} = -\beta v$

Die Differentialgleichung erster Ordnung

$$m\dot{v}(t) = -\lambda v(t),$$

oder mit $\beta = \lambda/m$,

$$\dot{v}(t) = -\beta v(t) \tag{2.5}$$

für die unbekannte Funktion $v(t)$ legt die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit eines Massenpunktes unter dem Einfluss einer Stokes'schen Reibungskraft fest (λ konstant). Verglichen mit der allgemeinen Form von Differentialgleichungen erster Ordnung $\dot{v} = A(v, t)$ handelt es sich um einen besonders einfachen Fall: die rechte Seite A ist linear in v und die unabhängige Variable tritt nicht explizite auf.

Lösung

Die Gleichung (2.5) sagt, dass $\dot{v}(t)$ und $v(t)$ proportional sind zueinander. Es ist deshalb zu erwarten, dass die Exponentialfunktion in der Lösung involviert ist. In der Tat stellen wir fest, dass jede Funktion $v(t)$ der Form

$$v(t) = v_0 e^{-\beta t} \quad (2.6)$$

für beliebige Werte der Konstanten v_0 eine Lösung darstellt (wir werden unten sehen, dass es keine weiteren Lösungen gibt). Die Differentialgleichung (2.5) hat also eine 1-parametrische Schar von Lösungen.

Die Konstante v_0 ist die Geschwindigkeit zur Zeit 0 : $v(0) = v_0$. Die Anfangsgeschwindigkeit darf also beliebig vorgeschrieben werden, und es existiert dazu genau eine Lösung:

$$v(t) = v(0) e^{-\beta t} . \quad (2.7)$$

Für diese Eindeutigkeit der Lösung zu einem gegebenen Anfangswert der gesuchten Funktion $v(t)$ gibt es einen guten Grund: tatsächlich kann man intuitiv einsehen, dass ein beliebiger gegebener Anfangswert $v(0)$ die zeitliche Fortsetzung $v(t)$ eindeutig festlegt. Die Differentialgleichung $\dot{v} = A(v, t)$ bestimmt nämlich die Veränderung von $v(t)$ in jedem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$, das heißt, aus der Kenntnis von $v(t)$ können wir $v(t + \Delta t)$ berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{v} = A(v, t) &\longrightarrow \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \approx A[v(t), t] \\ v(t + \Delta t) &\approx v(t) + \Delta t A[v(t), t] . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Wenn man also $v(0)$ kennt, kann man mit Hilfe von Gl. (2.8) $v(\Delta t)$ berechnen. Aus der Kenntnis von $v(\Delta t)$ kann man wieder mit Hilfe von (2.8) $v(2\Delta t)$ gewinnen, etc. Durch Hintereinanderschalten von vielen kleinen Schritten kann man also $v(t)$ aus $v(0)$ eindeutig bestimmen; dies ist die Idee der schrittweisen Integration (mehr dazu im nächsten Abschnitt).

Gibt es neben der Lösungsschar (2.6) weitere Lösungen der Differentialgleichung (2.5), die sich nicht in der Form (2.6) schreiben lassen? Dass dies nicht der Fall ist, lässt sich folgendermassen einsehen. Es sei $\bar{v}(t)$ irgendeine Lösung der Dgl. (2.5). Bilde $h(t) = e^{\beta t} \bar{v}(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \beta h(t) + e^{\beta t} \dot{\bar{v}}(t) \\ &= \beta h(t) - \beta h(t) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Funktion $h(t)$ ist also unabhängig von t , $h(t) = h_0 = \text{konst.}$ Daraus folgt $\bar{v}(t) = h_0 e^{-\beta t}$. Mit anderen Worten, jede Lösung der Dgl. (2.5) ist von der Form (2.6), w.z.b.w. .

Wir wollen eine direkte Methode zeigen, mit der sich die Dgl. (2.5) lösen lässt:

DGL 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

$$\begin{aligned} \dot{v} = -\beta v &\longrightarrow \frac{\dot{v}}{v} = -\beta \\ [\ln(v)]' &= -\beta \quad \Big| \int dt \\ \ln(v) &= -\beta t + \text{const.} \quad \Big| e^{\dots} \\ v &= e^{-\beta t + \text{const.}} = e^{-\beta t} \underbrace{e^{\text{const.}}}_{v_0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

also

$$\dot{v} = -\beta v \longrightarrow v(t) = v_0 e^{-\beta t}.$$

Das ganze nochmals, aber etwas formaler:

$$\begin{aligned} \dot{v} = -\beta v &\longrightarrow \frac{dv}{dt} = -\beta v \\ \frac{dv}{v} &= -\beta dt \\ \int \frac{dv}{v} &= -\beta t + a && \text{unbestimmtes Integral} \\ \ln v(t) &= -\beta t + a && a: \text{Integrationskonstante} \\ v(t) &= \underbrace{e^a}_{v_0} e^{-\beta t} \\ v(t) &= v_0 e^{-\beta t}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Man versucht, die Differentialgleichung so umzuformen, dass die abhängigen “Variablen” v, \dot{v} *nur* auf der linken Seite der Gleichung vorkommen. Falls es durch allfällige Umformungen zudem gelingt, dass die unabhängige Variable t auf der linken Seite *nicht explizit* vorkommt, spricht man von einer Differentialgleichung mit *trennbaren* Variablen. Solche Differentialgleichungen lassen sich, wie das Beispiel oben zeigt, relativ leicht lösen.

2.1 Übung

Die Gleichung $\dot{v} = -\gamma v^2$ ist nicht-linear. Die Variablen sind aber trennbar. Löse diese Gleichung mit der soeben beschriebenen Methode.

2.2 Übung

Löse die Gleichung $\dot{v} = -\gamma t v^3$.

2.3 Übung

Wie löst man eine Differentialgleichung der Form $\dot{f} = a(t)$, wobei die Funktion $a(t)$ vorgegeben ist? Darf man $f(0)$ frei vorgeben?

2.4 Übung

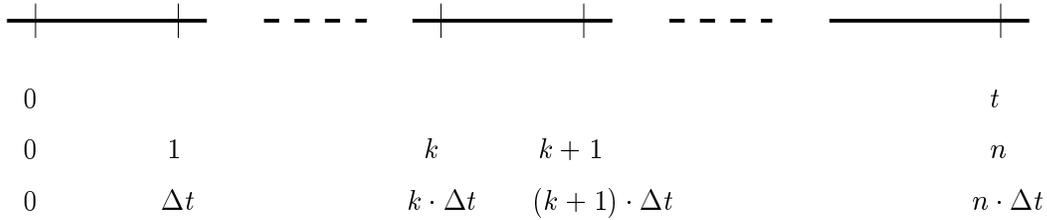
a) In ähnlicher Weise wie bei der Herleitung von (2.11) lässt sich allgemeiner ein Verfahren zur Lösungen von Gleichungen der Form $\dot{f} = A(f)$ mit beliebig vorgegebener Funktion $A = A(f)$ aufstellen. b) Funktioniert das Verfahren auch dann, wenn A explizite zeitabhängig ist, $A = A(f, t)$?

2.5 Übung

Freier Fall eines Massenpunktes aus grosser Höhe (zum Beispiel Mondsdistanz). Nach dem Energieerhaltungssatz lässt sich die Geschwindigkeit \dot{x} als Funktion des Abstandes x vom Erdzentrum angeben. Charakterisiere die damit vorliegende Differentialgleichung. Lösung? Fallzeit aus der Mondsdistanz?

2.2.2 Schrittweise Integration

Die Lösung der Differentialgleichung $\dot{v}(t) = -\beta v(t)$ zum Anfangswert $v(0) = v_0$ lässt sich auch durch schrittweise Integration finden. Wir teilen das Intervall $[0, t]$ der t -Achse in n Intervalle $\Delta t = t/n$ ein:



Bezeichnungen: $t_k = k \Delta t$, $v_k = v(t_k)$.

Aus der Differentialgleichung ergibt sich der Übergang $t_k \rightarrow t_{k+1}$ näherungsweise wie folgt (1 *Integrationsschritt*) :

$$\begin{aligned}
 v(t_k + \Delta t) &\approx v(t_k) + \Delta t \dot{v}(t_k) \\
 &\approx v(t_k) - \beta \Delta t v(t_k), \\
 v_{k+1} &\approx v_k (1 - \beta \Delta t).
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Über n Integrationsschritte hinweg findet man analog

$$\begin{aligned}
 v_n &\approx v_0 (1 - \beta \Delta t)^n, \\
 v(t) &\approx v_0 \left(1 - \frac{\beta t}{n}\right)^n.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Die exakte Lösung erwartet man für festen Wert t in der Grenze $n \rightarrow \infty$, bzw. $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_0 \left(1 - \frac{\beta t}{n}\right)^n = v_0 e^{-\beta t}. \tag{2.14}$$

Zur Genauigkeit in Abhängigkeit von der Schrittzahl ($\beta = 1, v_0 = 1, t = 1$) :

n	$v(t)$
10	0.349
100	0.366
∞	0.368 (exakt)

2.2.3 Verallgemeinerung

Die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form

$$\dot{f} = A(f, t), \quad (2.15)$$

d.h. im allgemeinen kann die rechte Seite in beliebiger Weise von f und der freien Variablen t abhängen. Falls $A(f, t)$ bestimmte Regularitätsbedingungen erfüllt, so gibt es zu jedem Anfangswert $f(0)$ genau eine Lösung. Wir wollen diese Regularitätsbedingungen in dieser Vorlesung nicht näher spezifizieren, weil uns die entsprechenden mathematischen Begriffe nicht zur Verfügung stehen. Stattdessen sei der Sachverhalt an Beispielen illustriert.

Beispiele:

Bsp. A) Die Differentialgleichung laute

$$\dot{f} = \frac{1}{3}f + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}t, \quad (2.16)$$

d.h. $A(f, t) = \frac{1}{3}f + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}t$. Man prüft leicht nach, dass

$$f_1 = \frac{1}{3}t \quad (2.17)$$

diese Differentialgleichung erfüllt. Ist dies die einzige Lösung? Sei f_2 eine *beliebige* Lösung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{f}_2 &= \frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}t, \\ \dot{f}_1 &= \frac{1}{3}f_1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}t. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Durch Subtraktion erhält man

$$\dot{\Delta} = \frac{1}{3}\Delta \quad \text{wobei} \quad \Delta \doteq f_2 - f_1. \quad (2.19)$$

Diese Differentialgleichung hatten wir oben schon gelöst - die allgemeine Lösung lautet

$$\Delta = C_0 e^{t/3}, \quad C_0 = \text{konst.} \quad (2.20)$$

Die beliebige Lösung f_2 ist also $f_1 + \Delta$, d.h.,

$$f_2 = \frac{1}{3}t + C_0 e^{t/3}. \quad (2.21)$$

Wir notieren, dass $C_0 = f_2(0)$. Jede Lösung der Dgl. (2.16) lässt sich also in dieser Form darstellen - die Dgl. besitzt in der Tat für jeden Wert von $f(0)$ genau eine Lösung, nämlich

$$f = \frac{1}{3}t + f(0)e^{t/3}. \quad (2.22)$$

Bsp. B) Die Differentialgleichung laute

$$\dot{f} = 2f \frac{\cos t}{\sin t}, \quad (2.23)$$

d.h., $A(f, t) = 2f \cos t / \sin t$. Da die Variablen trennbar sind, kann man diese Gleichung leicht lösen:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{f}}{f} &= 2 \frac{\cos t}{\sin t}; && \text{Variablen getrennt} \\ [\ln f] &= 2 \frac{\cos t}{\sin t} && \left| \int dt \right. \\ \ln f &= \ln[\sin^2 t] + \text{const.} && \left| e^{\dots} \right. \\ f &= e^{\ln[\sin^2 t] + \text{const.}} = e^{\ln[\sin^2 t]} \underbrace{e^{\text{const.}}}_C \\ f &= C \sin^2 t && \text{allg. Lösung} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Jede dieser Lösungen erfüllt $f(0) = 0$, unabhängig von Wert von C . Es gibt also unendlich viele Lösungen mit $f(0) = 0$, aber keine mit beispielsweise $f(0) = 3$.

Dieser Sachverhalt hat damit zu tun, dass $A(f, t) = 2f \cos t / \sin t$ bei $t = 0$ singulär ist und somit die oben erwähnten Regularitätsbedingungen nicht erfüllt sind.

Falls man $f(1)$ vorgeben würde, hätte man in der Umgebung von $t = 1$ eine eindeutige Lösung, wie man explizit leicht sieht.

Bsp. C) Die Differentialgleichung sei

$$\dot{f} = e^f \sin t, \quad (2.25)$$

d.h., $A(f, t) = e^f \sin t$. Wieder kann man die Variablen trennen und die Gleichung leicht lösen:

$$\begin{aligned} \dot{f} e^{-f} &= \sin(t) && | \text{ Variablen getrennt} \\ \left(-e^{-f}\right)' &= \sin(t) && | \int dt \\ -e^{-f} &= -\cos(t) + \text{const.} \longrightarrow f = -\ln[\cos(t) - \text{const.}] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Damit die folgende Diskussion etwas einfacher wird, setzen wir $\text{const.} = 1 - C$ und erhalten also

$$f = -\ln[\cos(t) - 1 + C]. \quad (2.27)$$

Man kann $f(0)$ beliebig vorgeben. Dadurch wird C fixiert:

$$f(0) = -\ln[\cos(0) - 1 + C] = -\ln C \longrightarrow C = e^{-f(0)}.$$

Beachte, dass $C > 0$. Es können folgende Fälle auftreten:

- (a) $C > 2$: Das Argument des Logarithmus in (2.27) ist positiv für alle t . Die Lösung existiert somit für alle t .
- (b) $0 < C \leq 2$: Die Lösung ist in einer Umgebung von $t = 0$ definiert; sie läuft aber in eine Singularität rein, nämlich dann, wenn das Argument des Logarithmus 0 oder negativ wird.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Lösung singularär werden kann für endliche Werte von t , obschon $A(f, t)$ nicht singularär ist.

Zusammenfassung

Beispiel A) Genau eine Lösung für beliebiges $f(0)$.

Beispiel B) Unendliche viele Lösungen zu $f(0) = 0$, aber keine z.B. zu $f(0) = 3$.

Beispiel C) Genau eine Lösung für beliebiges $f(0)$. Lösungen können singularär werden in der Nähe von $t = 0$, obschon $A(f, t)$ keine Singularität besitzt.

Die Fälle B),C) werden uns im folgenden nicht weiter beschäftigen - wir gehen davon aus, dass $A(f, t)$ die Voraussetzungen für eine eindeutige Lösung erfüllt.

2.2.4 Allgemeine Lösung, spezielle Lösung

Die *allgemeine* Lösung der Dgl. (2.15) hat die Gestalt

$$f(t) = h(t; C) \quad (2.28)$$

mit einer beliebigen Konstanten C , und $\dot{h} = A(h, t)$. [In anderen Worten: *Jede* Lösung von (2.15) kann aus $h(t; C)$ erhalten werden durch eine spezielle Wahl von C .] Die Konstante C heisst *Integrationskonstante*. Bei jeder speziellen Wahl von C ergibt sich eine *spezielle* Lösung von (2.15). Hat man die allgemeine Lösung gefunden, so ergibt sich die Lösung mit

$$f(0) = f_0, \quad (2.29)$$

indem man C aus $h(0; C) = f_0$ bestimmt.

Beispiel :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\beta x \\ \frac{\dot{x}}{x} &= -\beta \\ \int dt \frac{\dot{x}}{x} &= -\beta \int dt \\ \ln x &= -\beta t + c' \quad ; \quad \text{Integrationskonstante } c' \\ x(t) &= c e^{-\beta t} \quad ; \quad c : \text{freier Parameter} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Anpassung immer möglich: $x(0) = c$.

2.2.5 Richtungsfeld, graphische Lösung

In diesem Abschnitt betrachten wir die allgemeine Dgl. 1. Ordnung

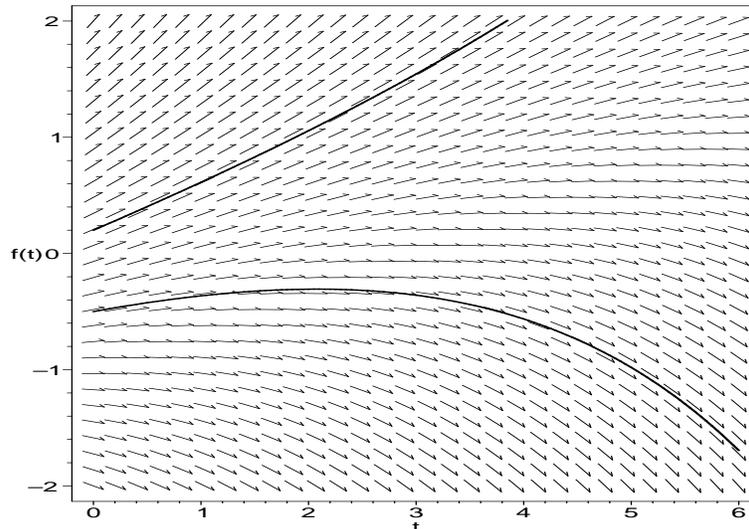
$$\dot{f} = A(f, t).$$

Betrachte jetzt (zunächst losgelöst von der Dgl.) eine Ebene mit den kartesischen Koordinaten (t, f) . Zeichne in jedem Punkt (t, f) dieser Ebene den Vektor $(1, A(f, t))$ als Pfeil ein. Dieses "Pfeilfeld" heisst das zur Dgl. gehörige *Richtungsfeld*. Beachte den wichtigen Punkt, dass man die Dgl. nicht lösen muss, um das erwähnte Richtungsfeld konstruieren zu können.

Als Illustration ist das Richtungsfeld (“Pfeilfeld”), welches zur Dgl.

$$\dot{f} = (3 + 3f - t)/9 \quad (2.31)$$

gehört, in der folgenden Figur aufgezeichnet.



Betrachte nun eine bestimmte Lösung $f(t)$ der Dgl. Man kann diese Lösung als Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = (t, f(t))$$

auffassen und in obiger Figur einzeichnen.

Bestimme den *Tangentialvektor* an diese Kurve zum Zeitpunkt t :

$$\dot{\vec{r}} = (1, \dot{f}(t)) = (1, A(f, t)).$$

Dieser Tangentialvektor stimmt mit dem Richtungsfeld im Punkt $\vec{r}(t)$ überein.

Oder (etwas sloppy ausgedrückt): Die Lösungskurven laufen längs dem Richtungsfeld.

Zur Illustration zeichnen wir in obigem Bild die Lösungen zur Dgl. (2.31) zu den Anfangsbedingungen $f(0) = 0.2$ und $f(0) = -0.5$ ein.

2.6 Übung

Skizziere das Richtungsfeld zur Differentialgleichung $\dot{v} = -v$.

2.7 Übung

$x = x(t)$, $\dot{x} = -2tx$. Allgemeine Lösung? Welche Information muss zum Zeitpunkt $t = 0$ angegeben werden, damit nur eine einzige Lösung resultiert?

2.8 Übung

$f = f(t)$, $\dot{f} = f^2$. Allgemeine Lösung?

2.9 Übung

$y = y(x)$, $dy/dx = -x/y$. Richtungsfeld? Lösung?

2.10 Übung

Richtungsfeld der Dgl. (2.25)? Woraus ist ersichtlich, dass die Lösungen in der Umgebung von $t = 0$ singular werden können?

2.3 Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

Ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die unbekanntenen Funktionen $f_k(t)$, $k = 1, \dots, N$, hat die Form

$$\begin{cases} \dot{f}_1 = A_1(f_1, f_2, \dots, f_N, t) \\ \dot{f}_2 = A_2(f_1, f_2, \dots, f_N, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{f}_N = A_N(f_1, f_2, \dots, f_N, t) \end{cases} \quad (2.32)$$

wobei die rechten Seiten A_k als Ausdrücke in den Unbekannten f_k und der freien Variablen t vorgegeben sind.

Die Bedeutung besteht u.a. darin, dass sich Differentialgleichungen höherer Ordnung auf Systeme von Gleichungen erster Ordnung zurückführen lassen.

Bsp.: Gedämpfte Schwingung. Diese wird beschrieben durch die Dgl. 2. Ordnung

$$\ddot{x} = -\alpha x - \beta \dot{x} + g(t). \quad (2.33)$$

α, β : gegebene Konstanten; $g(t)$: gegebene Antriebsfunktion. Gesucht: Ort x als Funktion der Zeit t .

Wir führen nun eine weitere unbekannte Hilfsfunktion ein, nämlich $v(t) = \dot{x}(t)$.

$$\text{Gl. (2.33)} \longrightarrow \dot{v} = -\alpha x - \beta v + g(t).$$

Damit entsteht ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für die unbekanntenen Funktionen $x(t)$ und $v(t)$,

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\alpha x - \beta v + g(t) \end{array} \right| \quad (2.34)$$

Bsp.: Betrachte die Dgl. 3. Ordnung

$$\ddot{x} = 2\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x$$

Diese Dgl. kann in ein System von 3 Dgl. 1. Ordnung umgeschrieben werden.

Man führt dazu die Hilfsfunktionen v und a ein, gemäss $v = \dot{x}$ und $a = \dot{v} (= \ddot{x})$ und erhält dann das System

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = v \\ \dot{v} = a \\ \dot{a} = 2a + 3v + 4x \end{array} \right| \quad (2.35)$$

Betrachte nun das allg. System von 2 Dgl. 1. Ordnung:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = A_1(x, v, t) \\ \dot{v} = A_2(x, v, t) \end{array} \right| \quad (2.36)$$

Diese Gleichungen enthalten folgende Information: aus den momentanen Werten $x(t)$, $v(t)$ der beiden Variablen folgen die momentanen Veränderungsgeschwindigkeiten $\dot{x}(t)$, $\dot{v}(t)$; das heisst, es ist eindeutig festgelegt, wie sich das System (beschrieben durch das Wertepaar x, v) verändert. Für ein kleines Zeitintervall Δt gilt

$$\begin{aligned} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} &\approx \dot{x}(t) = A_1(x(t), v(t), t) \\ \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} &\approx \dot{v}(t) = A_2(x(t), v(t), t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Somit lautet die Veränderung des Zustandes (x, v) :

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &\approx x(t) + \Delta t A_1[x(t), v(t), t], \\ v(t + \Delta t) &\approx v(t) + \Delta t A_2[x(t), v(t), t]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

$x(t), v(t)$ lässt sich somit aus $x(0), v(0)$ berechnen durch Hintereinanderschalten von vielen kleinen Integrationssschritten von Typ (2.38).

Das heisst insbesondere: zu jedem Anfangswertepaar $x(0), v(0)$ gibt es genau eine Lösung des Differentialgleichungssystems (2.34) erster Ordnung.

Da eine Dgl. 2. Ordnung (z.B. (2.33)) auf ein System von 2 Dgl. 1. Ordnung umgeschrieben werden kann, bedeutet dies: die Anfangswerte $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ dürfen frei vorgegeben werden, und hieraus ergibt sich die Lösung $x(t)$ eindeutig. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.33) zweiter Ordnung enthält also - genau wie das System (2.34) von zwei Gleichungen erster Ordnung - zwei freie Parameter, $x(0)$ und $v(0)$.

2.11 Übung

Versuche, ähnlich wie in Abschnitt 2.2.2, die folgende Differentialgleichung durch schrittweise Integration und Grenzübergang exakt zu lösen: $\ddot{x} = -x/2 - 3\dot{x}/2$; $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$. - In welcher physikalischen Situation tritt diese Gleichung auf?

In der Verallgemeinerung der obigen Aussagen zum System (2.36) von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung auf den allgemeinen Fall (2.32) eines Systems von N Differentialgleichungen erster Ordnung für die unbekannte Funktionen $f_k(t)$ ($k = 1, \dots, N$) ergeben sich die folgenden Feststellungen:

- Die *allgemeine* Lösung der Dgl. (2.32) hat die Form

$$f_k(t) = h_k(t; C_1, \dots, C_N); k = 1, \dots, N. \quad (2.39)$$

Die Konstanten C_k heissen *Integrationskonstanten*.

- Für jede spezielle Wahl der C_k erhält man eine *spezielle Lösung* der Dgl. (2.32).

- Falls die Funktionen A_k in (2.32) gewisse Regularitätsbedingungen erfüllen, so gibt es zu jedem beliebigen Anfangszustand $\{f_1(0), \dots, f_N(0)\}$ genau eine Lösung; sie wird erhalten, indem man die Konstanten C_k aus den Gleichungen

$$h_k(0; C_1, \dots, C_N) = f_k(0); k = 1, \dots, N \quad (2.40)$$

bestimmt.

2.12 Übung

Wandle die Gleichung der Form $\ddot{x} = A(x, \dot{x}, \ddot{x})$ für die unbekannte Funktion $x(t)$ in ein System von Gleichungen erster Ordnung um. Wieviele Integrationskonstanten

wird die allgemeine Lösung enthalten? Welche Größen dürfen zur Zeit $t = 0$ frei vorgeschrieben werden? Dürfte man diese Größen auch zu einem anderen Zeitpunkt vorschreiben?

2.4 Beispiele aus der Mechanik, Hinweise zur Lösung

In diesem Abschnitt streifen wir einige Typen von Bewegungsgleichungen aus der Mechanik eines Massenpunktes. Die ausführliche Behandlung von ausgewählten Differentialgleichungen folgt später.

2.4.1 $m\ddot{x} = 0$, freies Teilchen in einer Dimension

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 & | & \int dt \\ \dot{x} &= c_1 & | & \int dt \\ x(t) &= c_1 t + c_2 . \end{aligned} \tag{2.41}$$

Die allgemeine Lösung ist eine beliebige gleichförmige Bewegung. Sie enthält die zwei freien Parameter c_1, c_2 (Integrationskonstanten). Die Vorgabe von $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ bestimmt c_1 und c_2 :

$$x(t) = v_0 t + x_0 .$$

2.4.2 $m\ddot{x} = F(t)$

Die Kraft ist explizite als Funktion der Zeit vorgegeben. (Realisierung: Elektron in einem Plattenkondensator mit gegebener zeitabhängiger Spannung $U(t)$; betrachtet wird die Bewegungskomponente senkrecht zu den Platten).

Herleitung der allgemeinen Lösung :

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} F(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{1}{m} \int dt F(t) \quad ; \quad (\text{unbest. Integral, enth\u00e4lt Integrationskonstante } c_1) \\ x(t) &= \frac{1}{m} \int dt \int dt F(t) \quad ; \quad (\text{unbest. Integral, Int.konst. } c_2).\end{aligned}\quad (2.42)$$

Die allgemeine L\u00f6sung erscheint also als Resultat von zwei nacheinander ausgef\u00fchrten unbestimmten Integrationen. Die beiden Integrationskonstanten c_1, c_2 zeigen sich im Resultat in der Form $c_2 + c_1 t$. Die beiden Integrationskonstanten ergeben sich aus dem Anfangszustand.

Es ist auch m\u00f6glich, die Herleitung in bestimmten Integralen zu formulieren:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t') &= \frac{1}{m} F(t') \Big| \int_0^t dt' \\ \int_0^t dt' \ddot{x}(t') &= \frac{1}{m} \int_0^t dt' F(t'), \\ \dot{x}(t) - \dot{x}(0) &= \frac{1}{m} \int_0^t dt' F(t'), \\ \dot{x}(t') &= \dot{x}(0) + \frac{1}{m} \int_0^{t'} dt'' F(t''), \\ \int_0^t dt' \dot{x}(t') &= \int_0^t dt' \dot{x}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' F(t''), \\ x(t) - x(0) &= \dot{x}(0) t + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' F(t'') \\ x(t) &= x(0) + \dot{x}(0) t + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' F(t'').\end{aligned}\quad (2.43)$$

In dieser Schreibweise der L\u00f6sung stellen die Anfangswerte $x(0), \dot{x}(0)$ selber die beiden freien Parameter dar.

2.13 \u00dcbung

$m\ddot{x} = F_0 \sin \omega t$, wobei F_0 und ω gegebene Konstante sind. Allgemeine L\u00f6sung? Skizziere die Funktion $x = x(t)$ f\u00fcr $x(0) = 0$ und verschiedene Werte der Anfangsgeschwindigkeit.

2.4.3 $m\ddot{x} = F(x)$

Die Kraft ist als Funktion des Ortes vorgegeben. In dieser eindimensionalen Situation existiert immer ein Potential $V(x)$:

$$V(x) = - \int dx F(x) \quad ; \quad F(x) = - \frac{dV(x)}{dx} = -V'(x). \quad (2.44)$$

Wir multiplizieren zuerst die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = F(x)$ auf beiden Seiten mit $\dot{x}(t)$ und führen dann ein paar Schritte aus:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t)\dot{x}(t) &= F(x)\dot{x}(t) = -\frac{dV}{dx}\dot{x}(t), \\ m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x})^2 &= -\frac{dV(x(t))}{dt} \quad \Big| \int dt \\ \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) &= -V(x(t)) + E \end{aligned} \tag{2.45}$$

E ist als Integrationskonstante ins Spiel gekommen. Ihre Bedeutung ist die totale (erhaltene) Energie. Der Schlussausdruck in der obigen Gleichung ist also nichts anderes als der Energieerhaltungssatz.

Wir hätten natürlich auch gerade mit diesem Erhaltungssatz starten können, statt ihn zuerst herzuleiten.

Wir lösen nun Gl. (2.45):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x(t))]}, \\ \frac{\dot{x}(t)}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x(t))]}} &= 1 \quad \Big| \int dt \\ \int dt \frac{\dot{x}(t)}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x(t))]}} &= t + c_2, \\ \int dx \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} &= t + c_2. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Zum Vorzeichen \pm : In einer gegebenen Anwendung ist jeweils klar, welches Vorzeichen man nehmen muss (siehe Übungen).

Falls es gelingt, bei gegebenem Potential die unbestimmte Integration in (2.46) explizite auszuführen, so ist eine Beziehung der Form $t = t(x)$ hergestellt; diese kann im Prinzip nach x aufgelöst werden: $x = x(t)$.

Ursprünglich: Die Dgl. $m\ddot{x} = F(x)$ ist 2. Ordnung. Die allg. Lösung sollte 2 Integrationskonstanten haben. Wo sind diese in der Lösung (2.46)?

Beispiel: Übung 2.5, freier Fall aus grosser Höhe.

2.4.4 $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(t)$, dreidim.; $\vec{F}(t)$ vorgeg.

In Komponenten geschrieben, lautet die Dgl.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = F_1(t) \\ m\ddot{x}_2 = F_2(t) \\ m\ddot{x}_3 = F_3(t) \end{cases} \quad (2.47)$$

In den drei Gl. treten die unbekanntenen Funktionen $x_k(t)$ separiert auf.

Die drei Gl. können demzufolge einzeln und unabhängig voneinander wie im Abschnitt 2.4.2 gelöst werden.

2.4.5 $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$; $\vec{F}(\vec{x})$ gegebenes Kraftfeld

Falls es sich um ein konservatives Kraftfeld handelt, existiert ein Potential $V(\vec{x})$ so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$.

In diesem Fall können wir sagen, dass die Bewegung so verläuft, dass die totale Energie erhalten ist:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} &= -\vec{\nabla}V(\vec{x}), \\ m \int dt \ddot{\vec{x}} \dot{\vec{x}} &= - \int dt \dot{\vec{x}} \vec{\nabla}V(\vec{x}) = - \int dt \frac{d}{dt} V[\vec{x}(t)], \\ \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2(t) &= -V[\vec{x}(t)] + E \\ \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2(t) + V[\vec{x}(t)] &= E. \end{aligned} \quad (2.48)$$

E ist in dieser Herleitung nichts anderes als eine Integrationskonstante. Physikalisch ist E die (erhaltene) Totalenergie.

Sprechweise: Die totale Energie E ist ein *Integral der Bewegung*.

Oder: Die totale Energie E ist eine *erhaltene Grösse*.

2.5 Lösen von Differentialgleichungen mit MAPLE

Die Lösung eines Differentialgleichungssystems zu einem bestimmten Anfangszustand lässt sich mittels einfacher Programme mit beliebiger Genauigkeit numerisch ermitteln. Systeme wie MAPLE oder MATHEMATICA ersparen zudem die Einzelheiten der Programmierung, bzw. erlauben eine effiziente Formulierung der Aufgabe (Gleichungen, Anfangszustand, Art der numerischen oder grafischen Darstellung der Lösung).

Da die gängigen numerischen Methoden wie Euler-Verfahren, Runge-Kutta-Verfahren etc. im Kurs “Computerorientierte Physik” im vierten Semester diskutiert werden, gehen wir hier nicht auf diese ein.

Wir beschäftigen uns jedoch damit – vor allem in den Übungen –, wie man MAPLE oder MATHEMATICA für das Lösen von Differentialgleichungen einsetzen kann.

Wir illustrieren dies am Beispiel der Differentialgleichung

$$\dot{f}(t) = -2t f(t) . \quad (2.49)$$

In Übung 2.7 wurde diese Dgl. explizite gelöst:

$$f(t) = f(0) e^{-t^2} . \quad (2.50)$$

Programmsysteme wie MAPLE oder MATHEMATICA unterstützen symbolische, numerische und grafische Arbeiten am Computer. In dieser Umgebung formuliert man die Probleme – zum Beispiel Differentialgleichungen – ohne dass man sich um den Lösungsalgorithmus kümmern muss. Das folgende Beispiel ist als Illustration zu verstehen und nicht mit einer Anleitung zu verwechseln. Da im SUN-Cluster aus finanziellen Gründen MATHEMATICA nicht zur Verfügung steht, wird hier MAPLE benutzt.

- (1) Symbolische Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung (MAPLE). Im Ausdruck ODE wird die Dgl. spezifiziert.

```
ODE:=diff(f(t),t)+2*t*f(t);
```

Das Resultat erscheint in der folgenden Form:

$$\frac{d}{dt} f(t) + 2t f(t)$$

Um die Dgl. zu lösen, kann das Prozedere `dsolve` benutzt werden:
`dsolve(ODE,f(t));`

Das Resultat erscheint in der folgenden Form:

$$f(t) = C1 \exp(-t^2)$$

Die Integrationskonstante wurde von MAPLE mit $C1$ bezeichnet.

- (2) In der Prozedur `dsolve` können auch Anfangsbedingungen angegeben werden: `dsolve({ODE,f(0)=1},f(t));`

Das Resultat erscheint in der folgenden Form:

$$f(t) = \exp(-t^2)$$

- (3) Numerische Lösung der Differentialgleichung. Man gibt in `dsolve` einfach die Vorschrift `numeric` ein. Die grafische Darstellung kann mit dem Befehl `odeplot` erreicht werden - die unten dargestellte Figur erscheint auf dem Bildschirm.

```
sol:=dsolve({ODE,f(0)=1},f(t),numeric);
```

```
with(plots): odeplot(sol,[t,f(t)],0...2);
```

Beachte, dass die Anfangsbedingungen angegeben werden müssen - sonst ist keine numerische Auswertung möglich!

- (4) Weitere Möglichkeiten, Lösungen aus numerischen Rechnungen grafisch darzustellen, werden in den Übungen besprochen. Zudem wird dort eine detailliertere Anleitung zum Lösen von Differentialgleichungen mit MAPLE abgegeben.

2.5.1 Literatur zu Maple

- M. Kofler, G. Bitsch und M. Komma, "Maple, Einführung, Anwendung, Referenz"; Addison-Wesley, Pearson Studium, 5. Auflage, München 2002; ISBN 3-8273-7036-1. Auch online Anleitungen vorhanden.

- S.Wolfram, The Mathematica Book. Cambridge University Press, Third Edition (1996), ISBN 0521588898
Auch online Anleitungen vorhanden.
- W.H.Press et al, Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press (1986).
Sorgfältig diskutierte Algorithmen zu einem weiten Spektrum von numerischen Problemen (Idee, Anwendbarkeit, Stabilität, etc). Die Algorithmen sind in verschiedenen Programmiersprachen erhältlich.
- Weitere Anleitungen zu Maple und Mathematica im Buchhandel, oder www.amazon.com.

Die folgenden Übungen sind z.T. analytisch lösbar. Computerarbeit empfohlen.

2.14 Übung

Wie überprüft man in MAPLE, dass das Programm eine vorgegebene Dgl. richtig gelöst hat? Beispiel ausarbeiten.

2.15 Übung

Man habe eine Dgl. in MAPLE numerisch gelöst. Wie erstellt man ein file mit einer Figur? Wie druckt man sie aus? Beispiel ausarbeiten.

2.16 Übung

$$y'(x) = -2xy(x) + x .$$

a) Allgemeine Lösung? b) Lösung mit der Eigenschaft $y(1) = 1$?

2.17 Übung

Bewegung eines Massenpunktes längs x unter dem Einfluss einer Reibung: $\dot{v}(t) = A(v)$; Anfangsort: $x(0) = 0$; Anfangsgeschwindigkeit: $v(0) = 1$. Betrachte die folgenden drei Fälle:

a) $A(v) = -\lambda v$ (λ konstant)

b) $A(v) = -\lambda v^2$ (λ konstant)

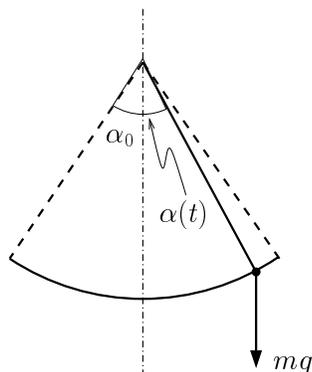
c) $A(v) = -\lambda_1 v - \lambda_2 v^2$ (λ_k konstant) .

Finde $v(t)$. Gibt es Fälle, in denen das Teilchen im Laufe der Zeit einen beliebig grossen Weg zurücklegt ($x(\infty) = \infty$)?

2.18 Übung

Das ebene Fadenpendel erfüllt die Differentialgleichung $\ddot{\alpha}(t) = -(g/a) \sin \alpha$ (hier ohne Beweis).

- a) Für kleine Amplituden lautet die Näherungslösung: $\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t)$. ($\alpha_0 \ll 1$). Begründung? ω ?
- b) Studiere Abweichungen von der harmonischen Schwingung bei grossen Amplituden, z.B. $\alpha_0 = \pi/2$. Suche geeignete grafische Darstellungen. Erläutere die Gründe für die Abweichungen.
- c) Untersuche die Schwingungszeit als Funktion der Amplitude.



2.5.2 Literatur zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Es gibt in erster Näherung unendlich viele Bücher über gewöhnliche Differentialgleichungen - ein Blick in die Bibliothek lohnt sich auf jeden Fall. In

A. Jeffrey, *Linear Algebra and ordinary Differential equations*, Blackwell Scientific Publications, Boston, 1990, ISBN 0-86542-114-5

wird im Kapitel 4.7 die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen auf einfache Art und Weise diskutiert. Erhältlich in der Bibliothek der exakten Wissenschaften, Signatur GLA 165.

Ausserdem sei hier noch erwähnt:

J.C. Butcher, *The numerical analysis of ordinary differential equations*, John Wiley, New York, 1987, ISBN 047191046 5. Erhältlich in der Bibliothek der exakten Wissenschaften, Signatur MAE 208.

3 Schwingungsprobleme, lineare Dgl.

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Lösung von eindimensionalen Schwingungsproblemen, z.B. erzwungenen gedämpften Schwingungen. Diese führen auf *lineare* gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir nehmen die Gelegenheit wahr, etwas ausführlicher auf lineare gewöhnliche Differentialgleichungen einzugehen. Bei den erzwungenen Schwingungen betrachten wir in dieser Vorlesung nur solche mit harmonischem Antrieb. Antriebe durch einen kurzen Kraftstoss, sowie Antriebe, die durch eine beliebige Funktion beschrieben sind, werden wir in der Vorlesung “Mathematische Methoden der Physik III” im dritten Semester diskutieren.

3.1 Beispiele linearer Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung oder ein System von Differentialgleichungen heisst *linear*, falls die unbekannt Funktionen und ihre Ableitungen nur in der ersten Potenz auftreten, und keine Produkte von Unbekannten vorkommen. Beispiele:

$$\dot{v} = -\gamma v \quad \text{freies Teilchen mit Reibung (Stokes)} \quad (3.1)$$

$$\dot{v} = -\gamma v + f(t) \quad \text{dito, mit Antrieb (Langevin Gleichung)} \quad (3.2)$$

$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x} + g \quad \text{freier Fall mit Reibung} \quad (3.3)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad \text{ungedämpfte harmon. Schwingung} \quad (3.4)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \gamma \dot{x} \quad \text{gedämpfte harmon. Schwingung} \quad (3.5)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \gamma \dot{x} + f(t) \quad \text{erzwungene ged. harmon. Schwingung} \quad (3.6)$$

$$\ddot{\vec{x}} = -\omega_0^2 \vec{x} - \gamma \dot{\vec{x}} + \vec{f}(t) \quad \text{dito, in drei Dimensionen} \quad (3.7)$$

$$J_n'' + \frac{1}{x} J_n' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0 \quad \text{Besselsche Differentialgleichung} \quad (3.8)$$

Beispiele von nicht-linearen Differentialgleichungen sind: (i) $m\ddot{x} = -V'(x)$;
(ii) $\dot{v} = -v^2$.

Die Gleichungen (3.1)–(3.7) haben *konstante Koeffizienten*, im Gegensatz zur Besselschen Gleichung. Die Gleichungen (3.1), (3.4), (3.5) und (3.8) sind *homogen*: alle Terme enthalten die Unbekannte linear. Wegen additiver Terme, welche die

Unbekannte nicht enthalten, heissen die Gleichungen (3.2), (3.3), (3.6) und (3.7) *inhomogen*; ein solcher Term heisst *Inhomogenität*.

3.2 Inhomogene und homogene Gleichungen

Eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich auf Form

$$\ddot{x}(t) + \alpha_1 \dot{x}(t) + \alpha_0 x(t) = f(t) \quad (3.9)$$

bringen, wobei $x(t)$ die unbekannte Funktion ist. Die Koeffizienten α_0 und α_1 dürfen von t abhängen; $f(t)$ ist die Inhomogenität.

Mit Hilfe des Differentialoperators D

$$D = \left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \alpha_1 \frac{d}{dt} + \alpha_0 \quad (3.10)$$

lässt sich Gl. (3.9) in Kurzform schreiben:

$$D x = f \quad (3.11)$$

Die zugehörige homogene Gleichung lautet

$$D h = 0 \quad (3.12)$$

(hier sind Lösungen der homogenen Gleichung mit $h(t)$ bezeichnet).

Es gilt der folgende Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

Satz: Seien α_0, α_1 und f stetig im Intervall $J = [a, b]$. Dann gibt es zu vorgegebenen $t_0 \in J; x_0, x_1$ genau eine Lösung der Dgl. (3.11), welche die Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = x_1$ erfüllt.

Die allgemeine Lösung der Dgl. (3.11) enthält also zwei freie Konstanten.

Umgekehrt: Kennt man eine Lösungsschar von (3.11) mit zwei freien Konstanten und enthält diese Schar eine Lösung zu jedem Anfangszustand, so liegt die allgemeine Lösung der betreffenden Gleichung vor. Diese Aussage gilt auch für die homogene Version (3.12).

Wir notieren einige Sätze:

- $h_1(t)$ und $h_2(t)$ seien 2 Lösungen der homogenen Gl., d.h.,

$$D h_1(t) = 0; \quad D h_2(t) = 0.$$

Dann ist die Linearkombination [k_1, k_2 : Konstanten]

$$h(t) = k_1 h_1(t) + k_2 h_2(t)$$

auch eine Lösung, denn

$$D h = D[k_1 h_1 + k_2 h_2] = k_1 D h_1 + k_2 D h_2 = 0.$$

- Seien zwei Lösungen h_1 und h_2 der homogenen Gleichung bekannt, die die Bedingung

$$\det \begin{pmatrix} h_1(t_0) & h_2(t_0) \\ \dot{h}_1(t_0) & \dot{h}_2(t_0) \end{pmatrix} \neq 0, \quad t_0 \in J \quad (3.13)$$

erfüllen. Dann ist

$$h(t) = k_1 h_1(t) + k_2 h_2(t) \quad (3.14)$$

die *allgemeine* Lösung der homogenen Gleichung (3.12).

Beweis: Aus dem vorangehenden Satz ist klar, dass $h = k_1 h_1 + k_2 h_2$ eine 2-parametrische Lösungsschar ist. Damit diese Schar die allg. Lösung darstellt, muss man die Anfangsbedingung $h(t_0) = \hat{h}_0$ und $\dot{h}(t_0) = \hat{h}_1$ mit bel. \hat{h}_0, \hat{h}_1 implementieren können, also

$$\begin{cases} h(t_0) = k_1 h_1(t_0) + k_2 h_2(t_0) \stackrel{!}{=} \hat{h}_0 \\ \dot{h}(t_0) = k_1 \dot{h}_1(t_0) + k_2 \dot{h}_2(t_0) \stackrel{!}{=} \hat{h}_1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Die Matrixschreibweise für dieses Gleichungssystem lautet:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} h_1(t_0) & h_2(t_0) \\ \dot{h}_1(t_0) & \dot{h}_2(t_0) \end{pmatrix}}_H \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{h}_0 \\ \hat{h}_1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Damit man diese Gl. für bel. \hat{h}_0, \hat{h}_1 nach k_1, k_2 auflösen kann, muss die Matrix H invertierbar sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det H \neq 0$. Somit ist die Aussage bewiesen.

- Die eben diskutierten Lösungen $h_{1,2}$ spannen also einen zweidimensionalen Vektorraum auf, dessen Elemente Lösungen der homogenen Gleichung (3.12) sind.

- Unter einer *partikulären Lösung* einer Differentialgleichung versteht man eine Lösung ohne freie Parameter. Sei eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Gleichung und die allgemeine Lösung $h(t)$ der homogenen Gleichung bekannt

$$\begin{aligned} D x_p &= f, \\ D h &= 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dann ist $x(t) = h(t) + x_p(t)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

3.1 Übung

Beweise diese Behauptung.

- Wir setzen voraus, die Koeffizienten α_k im Differentialoperator D seien *reell*. Sei $h_c(t)$ eine komplexe Lösung der homogenen Gleichung. Dann ist der Realteil $\operatorname{Re}(h_c)$ (wie auch der Imaginärteil) für sich allein Lösung

$$D h_c = 0 \quad \rightarrow \quad D \operatorname{Re}(h_c) = 0. \tag{3.18}$$

Beweis: Übung.

Bem.: Um den (fast trivialen) Beweis führen zu können, müssen wir wissen, wie die Ableitung einer komplexwertigen Funktion nach der reellen Variablen t gemeint ist. Zerlege dazu $h_c(t)$ in Real- und Imaginärteil:

$$h_c(t) = \operatorname{Re} h_c(t) + i \operatorname{Im} h_c(t).$$

Die Ableitung ist dann definiert gemäss

$$\frac{d}{dt} h_c = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} h_c(t) + i \frac{d}{dt} \operatorname{Im} h_c(t).$$

Wichtiges Bsp.: $\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = ? \quad \omega \text{ reell}$

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad (\text{Euler})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{i\omega t} &= -\omega \sin(\omega t) + i \omega \cos(\omega t) \\ &= i \omega [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = i \omega e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i \omega e^{i\omega t} \tag{3.19}$$

Wir illustrieren den Satz an einem Beispiel: $h_c(t) = e^{i\omega t}$ erfüllt die Dgl.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{3.20}$$

$\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ sind Real- und Imaginärteil von $e^{i\omega t}$. Man prüft leicht nach, dass diese die Dgl. auch erfüllen.

- Für inhomogene Gleichungen lautet der entsprechende Satz [es ist wiederum vorausgesetzt, dass die Koeffizienten α_k im Differentialoperator D reell sind]:

$$D x_c = f_c \quad \rightarrow \quad D \operatorname{Re}(x_c) = \operatorname{Re}(f_c) . \quad (3.21)$$

Analoge Feststellungen gelten auch für Gleichungen erster Ordnung, mit dem einzigen Unterschied, dass die allgemeinen Lösungen dann nur einen einzigen freien Parameter (Integrationskonstante) enthalten.

Bemerkung:

Die zentrale Aussage dieses Abschnittes lautet: Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. (3.11) zu finden, bestimme man die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (3.12) und addiere dazu eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (3.11).

3.2 Übung

$\ddot{x} = -\gamma \dot{x} + g$ (freier Fall mit Reibung).

- Suche eine möglichst einfache partikuläre Lösung.
- Wie lautet die allgemeine Lösung?
- Wie lautet die Lösung zu $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$? Sei $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}, g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$. Stelle $x(t)$ grafisch dar und kommentiere diese Bewegung.

3.3 Übung

Gleichung von Langevin: $\dot{v} = -\gamma v + f(t)$. Wir beschränken uns auf den Bereich $t \geq 0$. Die Konstante γ und der Antrieb f seien gegeben.

- Verifiziere, dass

$$v_p(t) = \int_0^t dt' e^{-\gamma(t-t')} f(t') \quad (3.22)$$

eine Lösung ist.

- Wie ist die Aussage zu verstehen, v_p sei eine partikuläre Lösung?
- Wie lautet die allgemeine Lösung?
- Wie lautet die Lösung zum Anfangszustand $v(0) = 0$?

(e) Wie lautet die Lösung zum Anfangszustand $v(0) = 1$?

(f) darf man neben $v(0)$ auch $\dot{v}(0)$ vorschreiben?

3.3 Freie Schwingungen

Schwingungen ohne Antrieb heissen *freie Schwingungen* und sind durch homogene Differentialgleichungen beschrieben.

3.3.1 Ungedämpfte Schwingung

Die Differentialgleichung der *freien ungedämpften harmonischen Schwingung* eines Massenpunktes lautet

$$m \ddot{x} = -K x \longrightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0 \quad (3.23)$$

Die Kraft $F = -K x$ kann durch eine ideale Feder realisiert sein (Federkonstante K ; Ruhelänge 0). Mit der Abkürzung

$$\omega_0^2 = K/m \quad (\omega_0 > 0) \quad (3.24)$$

ergibt sich daraus die Schwingungsgleichung in der Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.25)$$

Mit dem Ansatz $x = e^{\lambda t}$ erhalten wir zwei unabhängige Lösungen:

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} &= 0, \\ \lambda^2 + \omega_0^2 &= 0, \\ \lambda &= \pm i \omega_0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

hieraus durch Linearkombination Lösungen der Form

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha_+ e^{i\omega_0 t} + \alpha_- e^{-i\omega_0 t} \\ &= (\alpha_+ + \alpha_-) \cos(\omega_0 t) + i(\alpha_+ - \alpha_-) \sin(\omega_0 t) \\ &= a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Reelle Lösungen, die uns im folgenden interessieren, haben wir genau dann wenn a und b reell sind (resp., wenn $\alpha_- = \alpha_+^*$), also

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \quad (a, b \text{ reell}). \quad (3.28)$$

Gl. (3.28) lässt sich auch in folgender äquivalenten Form schreiben

$$x(t) = c \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (3.29)$$

$$\text{mit } c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Amplitude})$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad (\text{Phase}). \quad (3.30)$$

Grund:

$$x(t) = c \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi) + c \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi) \quad (\text{Add.theorem})$$

$$\text{Vergleiche mit (3.28): } a = c \cos(\varphi); \quad b = c \sin(\varphi) \quad (*)$$

$$(*) \implies a^2 + b^2 = c^2 \cos^2(\varphi) + c^2 \sin^2(\varphi) = c^2 \longrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(*) \implies \frac{b}{a} = \tan(\varphi) \longrightarrow \varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad \square \quad (3.31)$$

Eigenschaften der Lösung (3.29):

- Die Kreisfrequenz ω_0 ist unabhängig von der Amplitude c .
- Schwingungsdauer T : Das Argument der \cos -Funktion nimmt während T um 2π zu: $\omega_0 T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{m/K}$;
Schwingungsfrequenz: $\nu = 1/T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K/m}$.
- (3.29) ist die allgemeine Lösung. Begründung: Anpassung an beliebigen Anfangszustand möglich. $x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_0} \dot{x}(0) \sin(\omega_0 t)$. Diese Formel bekommt man etwas einfacher, wenn man mit (3.28) startet.

3.3.2 Gedämpfte Schwingung

Mit einer Reibungskraft $-\Gamma \dot{x}$ wird die oben betrachtete Schwingung zu einer *gedämpften Schwingung*

$$m \ddot{x} = -K x - \Gamma \dot{x} \longrightarrow \ddot{x} + \frac{\Gamma}{m} \dot{x} + \frac{K}{m} x = 0. \quad (3.32)$$

Die Kraft ist jetzt also $F = -Kx - \Gamma \dot{x}$. Mit den Abkürzungen

$$\gamma = \Gamma/m \quad (\gamma > 0); \quad \omega_0^2 = K/m \quad (3.33)$$

ergibt sich daraus die Schwingungsgleichung in der Form

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.34)$$

Wir versuchen es wieder mit dem Ansatz $x = e^{\lambda t}$:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 &= 0, \\ \lambda_{1,2} &= -\gamma/2 \pm \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

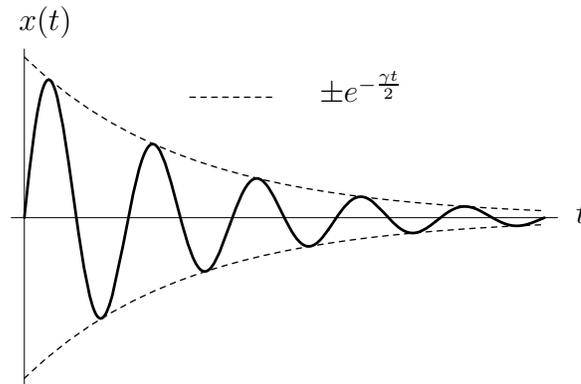
Fall 1 : schwache Dämpfung, $\gamma/2 < \omega_0$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\gamma/2 \pm i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \quad (\text{reell, } > 0), \\ x(t) &= \alpha_+ e^{-\gamma t/2 + i\Omega t} + \alpha_- e^{-\gamma t/2 - i\Omega t} \\ &= e^{-\gamma t/2} [\alpha_+ e^{i\Omega t} + \alpha_- e^{-i\Omega t}]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Der erste Faktor beschreibt die Abnahme der Amplitude infolge der Dämpfung, die eckige Klammer eine harmonische Schwingung. In reeller Schreibweise:

$$x(t) = c e^{-\gamma t/2} \cos(\Omega t - \varphi). \quad (3.37)$$

Das Resultat $x(t)$ in (3.37) ist in der Figur dargestellt.



In der Zeit $\tau = 2/\gamma$ sinkt die Amplitude auf den Bruchteil e^{-1} ab: γ klein $\rightarrow \tau$ gross (schwache Dämpfung).

Fall 2: kritische Dämpfung, $\gamma/2 = \omega_0$. Die Differentialgleichung wird

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{\gamma^2}{4}x = 0. \quad (3.38)$$

Der Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ liefert nur eine einzige Lösung (in den Notationen von Fall 1 : $\Omega = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma/2$). Diese Lösung lautet also: $x_1(t) = c_1 e^{-\gamma t/2}$

$x_1(t)$ ist Lösung, aber *nicht* die allg. Lösung, da nur eine freie Konstante c_1 vorhanden ist.

Man kann in dieser Situation eine weitere unabhängige Lösung mit der Methode gewinnen, die man *Variation der Konstanten* nennt.

Ansatz: $x_2(t) = f(t)e^{-\gamma t/2}$ "Variation der Konstanten"

Idee: Aus der Dgl. (3.38) für $x_2(t)$ eine Dgl. für $f(t)$ herleiten. Wir stellen dazu \dot{x} und \ddot{x} bereit:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{f} e^{-\gamma t/2} - f \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma t/2} \\ \ddot{x}_2 &= \ddot{f} e^{-\gamma t/2} - \dot{f} \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma t/2} - \dot{f} \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma t/2} + f \frac{\gamma^2}{4} e^{-\gamma t/2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

x_2 , \dot{x}_2 , \ddot{x}_2 in (3.38) einsetzen; $e^{-\gamma t/2}$ rauskürzen

$$\ddot{f} - \gamma\dot{f} + \frac{\gamma^2}{4}f + \gamma\dot{f} - \frac{\gamma^2}{2}f + \frac{\gamma^2}{4}f = 0 \implies \ddot{f} = 0 \quad (3.40)$$

Die Dgl. für f ist also besonders einfach: $\ddot{f} = 0$. Die allg. Lösung ist $f(t) = c_2 t + c_3$. Für $x_2(t)$ erhalten wir somit

$$x_2(t) = (c_2 t + c_3) e^{-\gamma t/2}. \quad (3.41)$$

Die allgemeine Lösung im Fall 2 lautet also

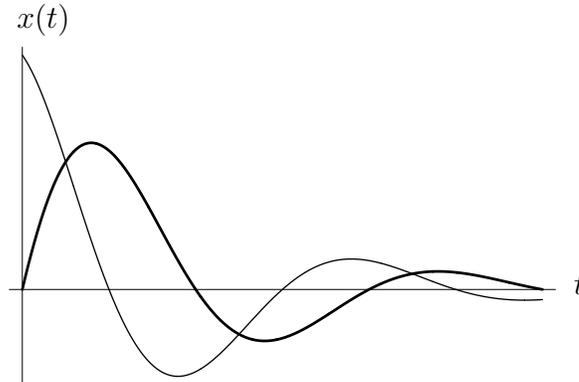
$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t/2}, \quad (3.42)$$

wobei c_i beliebige Konstanten sind.

3.4 Übung

Löse die Differentialgleichung (3.38) mit MAPLE.

Die untenstehende Figur zeigt Lösungen mit verschiedenen Anfangsbedingungen.



Fall 3 : starke Dämpfung, $\gamma/2 > \omega_0$. Aus (3.35) ergeben sich zwei Lösungen mit reellen Exponenten,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\gamma/2 + \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2} < 0, \\ \lambda_2 &= -\gamma/2 - \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2} < 0.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}, \quad a, b \text{ reell.} \quad (3.44)$$

3.4 Erzwungene gedämpfte Schwingung

Eine Antriebskraft $F(t)$, welche als Funktion der Zeit vorgegeben ist, macht die bisher betrachtete freie Schwingung zu einer *erzwungenen Schwingung*

$$m \ddot{x} = -K x - \Gamma \dot{x} + F(t) \longrightarrow \ddot{x} + \frac{\Gamma}{m} \dot{x} + \frac{K}{m} x = \frac{F(t)}{m}. \quad (3.45)$$

Die Gesamtkraft auf den schwingenden Massenpunkt ist also $F = -K x - \Gamma \dot{x} + F(t)$. Wir betrachten hier den gedämpften Fall ($\Gamma \neq 0$). Mit den Abkürzungen

$$\omega_0^2 = K/m \quad ; \quad \gamma = \Gamma/m \quad ; \quad f(t) = F(t)/m \quad (3.46)$$

ergibt sich

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \quad (3.47)$$

Da wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (3.34) bereits kennen, genügt es, eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (3.47) zu finden. Wir betrachten hier nur die speziellen Antriebe $f(t) = \cos(\omega t)$ und $f(t) = \sin(\omega t)$, für welche sich eine partikuläre Lösung mit elementaren Mitteln leicht finden lässt. Wie schon oben erwähnt, besprechen wir den allgemeinen Fall im dritten Semester in der Vorlesung “Mathematische Methoden der Physik III”.

3.4.1 Antrieb harmonisch

Zum komplexen Antrieb $f_c(t) = e^{i\omega t}$ ($\omega > 0$) lässt sich eine partikuläre Lösung von (3.47) mithilfe des Ansatzes

$$x_c(t) = A e^{i\omega t} \quad (3.48)$$

finden; einsetzen:

$$\left(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2\right) A e^{i\omega t} = e^{i\omega t}. \quad (3.49)$$

Es liegt tatsächlich eine Lösung vor, mit der Amplitude

$$A = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (3.50)$$

A lässt sich, wie jede komplexe Zahl, schreiben als Betrag \times Phasenfaktor

$$A = |A(\omega)| e^{-i\psi(\omega)}, \quad (3.51)$$

wobei

$$|A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}, \quad (3.52)$$

$$\tan \psi(\omega) = \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.53)$$

Aus $\gamma > 0$, $\omega > 0$ folgt $\text{Im}(A) < 0$. Somit lässt sich ψ im Bereich $0 \leq \psi \leq \pi$ wählen. Schliesslich ist

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}\{x_c(t)\} = \text{Re}\{A e^{i\omega t}\} \\ &= \text{Re}\{|A(\omega)| e^{-i\psi(\omega)} e^{i\omega t}\} \\ &= |A(\omega)| \cos[\omega t - \psi(\omega)] \end{aligned} \quad (3.54)$$

eine partikuläre Lösung zum reellen Antrieb $f(t) = \cos(\omega t)$. Amplitude $|A|$ und Phase ψ sind nach (3.52) und (3.53) durch die gegebenen Parameter γ, ω_0, ω bestimmt.

Diskussion

i) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t) \quad (3.55)$$

lautet also

$$x(t) = x_h(t) + |A(\omega)| \cos[\omega t - \psi(\omega)]; \quad (3.56)$$

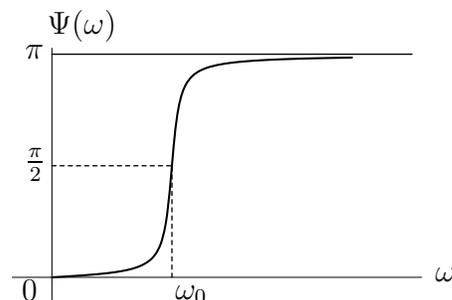
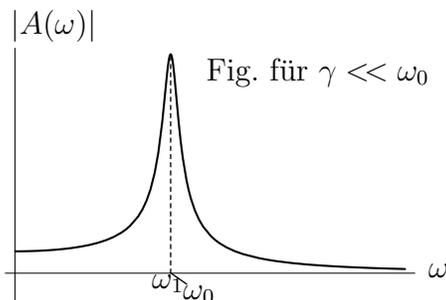
dabei ist x_h die allgemeine Lösung [(3.37),(3.42) oder (3.44)] der homogenen Gleichung (3.38). Der Anfangszustand $x(0), \dot{x}(0)$ legt die beiden Parameter in x_h fest. Aus den expliziten Formen von x_h ist ersichtlich, dass der erste Term in (3.56) nach hinreichend langer Zeit beliebig klein wird. Übrig bleibt dann nur der durch den Antrieb bestimmte zweite Term (harmonische Schwingung, sogenannte *ingeschwungene Lösung*).

ii) Die Amplitude $|A(\omega)|$ ist bei festen Parametern ω_0, γ von der Antriebsfrequenz abhängig. Wir suchen die Frequenz $\omega = \omega_1$, für welche $|A(\omega)|$ das Maximum annimmt. Aus $\frac{d}{d\omega}|A(\omega)| = 0$ und mit (3.52) erhält man für schwache bzw. starke Dämpfung

$$\omega_1 = \begin{cases} \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}, & \gamma^2/2 < \omega_0^2 \\ 0, & \gamma^2/2 > \omega_0^2. \end{cases} \quad (3.57)$$

Im Falle schwacher Dämpfung nennt man ω_1 die *Resonanzstelle*, oder *Resonanzfrequenz*. Bei sehr schwacher Dämpfung ($\gamma \ll \omega_0$) ist $\omega_1 \approx \omega_0$. Die maximale Amplitude beträgt dann nach (3.52) näherungsweise $1/(\gamma\omega_0)$.

Die Situation ist in der Figur illustriert.



3.5 Übung

Eine homogene Kugel mit Radius R schwimmt auf dem Wasser. Ihre Dichte ist gerade so gross, dass sie in Ruhelage zur Hälfte eintaucht. Das System werde nun aus der Ruhelage ausgelenkt.

- (a) Gib die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes an.
- (b) Von welchem Typ ist sie, wieviele Integrationskonstanten treten auf?
- (c) Nähere die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen $x \ll R$ durch eine lineare Differentialgleichung und löse sie.
- (d) Wie gross sind Periodendauer und Frequenz solcher Schwingungen?

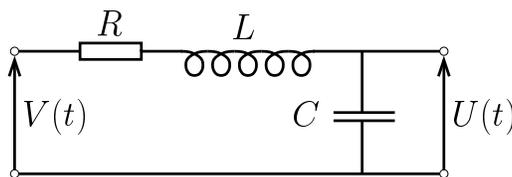
3.6 Übung

Betrachte die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x - A \cos(\omega t) = 0$.

- (a) Suche eine partikuläre Lösung dieser Gleichung. Ansatz: $x = a t \sin(\omega t - \varphi)$.
- (b) Physikalische Interpretation?

3.7 Übung

Ein ohmscher Widerstand R , eine Induktivität L und eine Kapazität C sind in Serie geschaltet. Die Spannung $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ sei von aussen angelegt.



- (a) Stelle die Differentialgleichung für die Spannung $U(t)$ über dem Kondensator auf. (Hinweis: die Spannung über der Induktivität ist $L \dot{I}$.)
- (b) Vergleiche die vorliegende Situation mit einem gedämpften mechanischen Oszillator. Stelle eine Tabelle von korrespondierenden Grössen auf.
- (c) Was versteht man unter der eingeschwungenen Lösung? Wie lautet sie? Wie hängt ihre Amplitude von der Frequenz ω ab (bei fester Amplitude V_0)? Bei welcher Frequenz ω_1 ist sie maximal?

(d) Kommentiere den Grenzfall $R \rightarrow 0$.

3.8 Übung

Wie die vorhergehende Aufgabe, jedoch sei nun V eine Überlagerung von zahlreichen harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenzen:

$$V(t) = \sum_i V_i \cos(\omega_i t - \varphi_i).$$

(V könnte von einer Antenne zugeführt sein). Diskutiere die Spannung über dem Kondensator und eine Anwendung dieser Schaltung.

3.9 Übung

Ein flexibles Seil der Länge L rutscht reibungsfrei von einer Tischplatte auf den Boden. Anfänglich hängt ein Seilstück der Länge a von der Tischkante herunter. Formuliere vereinfachte Modellannahmen für die Bearbeitung folgender Fragen.

- (a) Bewegungsgleichung für das Seilende?
- (b) allgemeine Lösung?
- (c) Wie lange dauert es, bis das Seil den Boden berührt?

3.10 Übung

Studiere die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + t x(t) = 0$ im Bereich $t > 0$. Um welchen Typ von Differentialgleichung handelt es sich? Da sich die exakte Lösung nicht ohne weiteres finden lässt, versuche man sich vorerst zu orientieren.

- (a) Für grosse Werte von t ($t \approx t_0$) kann der Faktor t durch die Konstante t_0 approximiert werden. Vergleiche mit harmonischen Schwingungen.
- (b) Grobe Skizze der Lösung für $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$. (evtl. numerische Lösung).
- (c) Gibt MAPLE die symbolische Lösung an?
- (d) Asymptotik für $t \rightarrow \infty$? - Hinweis: die exakte Lösung lässt sich in Besselfunktionen ausdrücken.

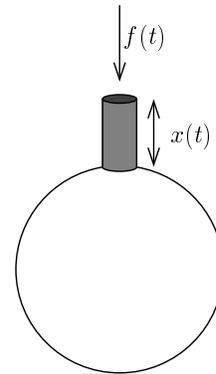
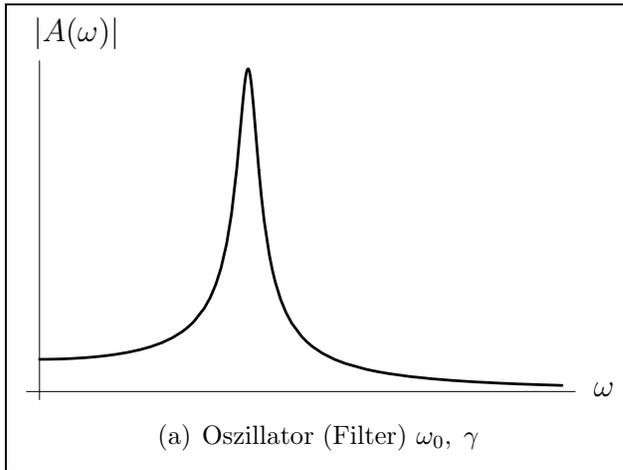
Die Aufgabe 3.7 illustriert, dass Resonanzphänomene nicht auf die Mechanik beschränkt sind. Resonanz kann immer dann auftreten, wenn eine Variable eines Systems harmonisch schwingen kann (i.a. ist diese Schwingung gedämpft), und

wenn ein Antrieb denkbar ist. Das System wird zu Schwingungen grosser Amplitude angeregt, wenn die Antriebsfrequenz in der Nähe der Eigenfrequenz des Systems liegt. Aufgabe 3.8 illustriert, dass ein solches System auch als *Filter* wirken kann (Bandpassfilter; kleine Dämpfung \rightarrow schmales Filter).

Ein Beispiel dazu ist in der nächsten Figur illustriert: die Luft im Hals der Flasche kann auf und ab schwingen; die Luft in der Flasche erfährt dabei adiabatische Zustandsänderungen (keine Wärmeaufnahme/Wärmeabgabe) und wirkt mechanisch wie eine Feder. Die Dämpfung stammt von der inneren Reibung der Luft (Viskosität). Die Schwingung der Luftmasse im Hals hat damit eine Eigenfrequenz ω_0 und eine Dämpfung γ , welche durch die Geometrie der Flasche und die physikalischen Konstanten der Luft bestimmt sind.

Als Antrieb wirkt der Geräuschpegel in der Aussenluft, d.h. eine Summe von harmonischen Luftdruckschwingungen mit verschiedensten Frequenzen. Die Luft im Hals ignoriert die Geräusche mit Frequenzen abseits von ω_0 mehr oder weniger, reagiert aber stark auf Geräusche im Bereich $\omega_0 \pm \gamma$. (Siehe Gl. (3.52) und Figur zu Resonanzfrequenz auf Seite 59.)

in:
 $\cos(\omega t)$



(b) Luft in Flaschenhals

out:
 $|A(\omega)| \cdot \cos[\omega t - \Psi(\omega)]$

Es gibt zahlreiche weitere Resonanzphänomene in der Akustik.

4 Das Zweikörperproblem

4.1 Einleitende Bemerkungen

Denkt man sich Sonne, Planeten und Monde als N Massenpunkte, so ist die Bewegung des Systems gemäss der Newtonschen Theorie durch das Gleichungssystem

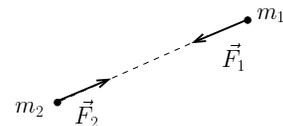
$$m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) = \sum_{k \neq i} \frac{G m_i m_k}{|\vec{x}_k - \vec{x}_i|^2} \frac{\vec{x}_k - \vec{x}_i}{|\vec{x}_k - \vec{x}_i|} \quad (4.1)$$

bestimmt. Die exakte Lösung lässt sich nur für $N = 2$ angeben (Zweikörperproblem der Gravitation).

Schon 1800 Jahre vor Kopernikus postulierte Aristarch von Samos (Alexandria, um 260 v.Chr.) eine unbewegliche Sonne, um welche die Erde kreist. Seine Originalpublikationen sind nicht überliefert, aber er wird von Archimedes (271-212) zitiert. Kopernikus (1473-1543) formulierte die Grundzüge des heliozentrischen Planetensystems etwa um 1510, ausführlich publiziert 1543. Die drei Gesetze von Kepler (1571-1630) lauten: (I) Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, wobei einer der Brennpunkte in der Sonne liegt. (II) Die Verbindung Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. (III) $T^2 \sim a^3$, wo a die grosse Halbachse der Bahnellipse und T die Umlaufzeit eines Planeten ist. Newton (1643-1727) formulierte das Gesetz der Gravitationskraft: das erste und dritte Keplersche Gesetz ergeben sich aus der Annahme, die Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}$ des Planeten sei indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes von der Sonne und in Richtung der Verbindungslinie (für das zweite Gesetz genügen schwächere Annahmen, nämlich dass die Kräfte in Richtung der Verbindungslinie liegen). Die Newtonsche Gravitationstheorie wurde erst 1916 durch die Allgemeine Relativitätstheorie Einsteins (1879-1955) modifiziert - für das Sonnensystem sind die Auswirkungen auf die Bahnbewegungen äusserst gering (Vorlesung über allgemeine Relativitätstheorie).

Wir betrachten in diesem Kapitel die Bewegung von zwei Massenpunkten m_1, m_2 unter dem Einfluss von gegenseitigen Kräften, wobei folgendes vorausgesetzt ist:

- actio = reactio : $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$
- Die Kräfte wirken in Richtung der Verbindungslinie

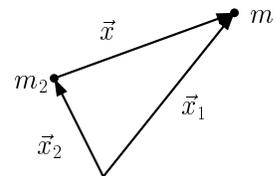


- Der Betrag F der Kraft hängt nur vom Abstand x ab.
(Wir werden insbesondere den Fall $F \sim x^{-2}$ betrachten, beschränken uns aber nicht auf diesen).

Diese Voraussetzungen sind in Gleichung (4.3) zusammengefasst.

Notationen

\vec{x}_1	Ort von m_1 (bez. Inertialsystem). Komponenten x_{1k}
\vec{x}_2	Ort von m_2 (bez. Inertialsystem). Komponenten x_{2k}
$\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$	Relativort
$x = \vec{x} $	Abstand
\vec{F}_1, \vec{F}_2	Kräfte auf die Massenpunkte
$\vec{p}_1 = m_1 \dot{\vec{x}}_1$	Impuls, Teilchen 1
$\vec{p}_2 = m_2 \dot{\vec{x}}_2$	Impuls, Teilchen 2
$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$	Totalimpuls
$M = m_1 + m_2$	Totalmasse
$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$	μ : reduzierte Masse



(4.2)

Die oben formulierte Voraussetzung über die Kräfte lautet

$$-\vec{F}_2 = \vec{F}_1 = F(x) \frac{\vec{x}}{x}. \quad (4.3)$$

$F(x) < 0$ bedeutet Anziehung, $F(x) > 0$ Abstossung.

Beispiele

- System Sonne-Erde, unter Vernachlässigung der Gravitationswirkung anderer Körper (Jupiter, Mond,..).

$$F(x) = -G \frac{m_1 m_2}{x^2} ; \quad G = 6.673 \cdot 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1} \quad (4.4)$$

- Mechanisches Modell des Wasserstoffatoms: Proton und Elektron unter dem Einfluss der gegenseitigen Coulomb-Anziehung (Spins, magnetische Momente vernachlässigt).

$$F(x) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} ; \quad \epsilon_0 = 8.85418782 \cdot 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (4.5)$$

- Zwei Massenpunkte, durch eine ideale elastische Kraft verbunden. $F(x) = -Dx$.
- Rutherfordstreuung: zwei gleich geladene Teilchen unter dem Einfluss der Coulombabstossung.

4.2 Die Gleichungen des Zweikörperproblems. Integrationskonstanten

Mit der Form (4.3) der Kräfte lauten die Bewegungsgleichungen für das Zweikörperproblem

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{x}}_1 &= F(x) \frac{\vec{x}}{x} \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= -F(x) \frac{\vec{x}}{x}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Wir wollen uns die Struktur dieser Gleichungen kurz in Erinnerung rufen: Die Funktion $F(x)$ hängt ab von den beiden Ortsvektoren \vec{x}_1, \vec{x}_2 ,

$$F(x) = F(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = F(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}), \quad (4.7)$$

siehe die Notation in Gleichung (4.2). Die Funktion $F(x)$ ist hier beliebig, die Gleichungen (4.6) stellen also ein gekoppeltes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die 6 Funktionen

$$x_{11}(t), x_{12}(t), \dots, x_{23}(t) \quad (4.8)$$

dar. Wie wir wissen, hat die allgemeine Lösung also 12 Integrationskonstanten: Ort und Geschwindigkeit

$$\vec{x}_i(t_0), \dot{\vec{x}}_i(t_0); \quad i = 1, 2 \quad (4.9)$$

der beiden Massenpunkte m_1 und m_2 können zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 frei vorgegeben werden. Die Lösung ist dann festgelegt für $t > t_0$.

Wir wollen im folgenden diese 12 Integrationskonstanten stets im Auge behalten - dies wird uns helfen, während der Lösung nicht den Wald vor lauter Bäumen aus den Augen zu verlieren. Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir im folgenden den Zeitpunkt bei $t = 0$,

$$t_0 = 0. \quad (4.10)$$

Als Anfangsbedingungen muss man also vorgeben

$$\vec{x}_i(0), \dot{\vec{x}}_i(0); i = 1, 2. \quad (4.11)$$

Durch geschickte Wahl der Koordinaten gelingt es, das Problem zurückzuführen auf zwei nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung für zwei Variablen - zehn der zwölf Integrationen können also immer explizite ausgeführt werden!

4.3 Schwerpunktkoordinaten, Impulserhaltung

Mit der Form (4.3) der Kräfte lauten die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{p}}_1 = m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_1 = F(x) \frac{\vec{x}}{x} \quad (4.12)$$

$$\dot{\vec{p}}_2 = m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = \vec{F}_2 = -F(x) \frac{\vec{x}}{x}. \quad (4.13)$$

Addition ergibt die Erhaltung des totalen Impulses:

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0, \quad \dot{\vec{P}} = 0. \quad (4.14)$$

Die Erhaltung des Totalimpulses ist die Folge von $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ (keine äusseren Kräfte).

Der Ort des Schwerpunktes ist wie folgt definiert:

$$\vec{X} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.15)$$

Ein paar nützliche Aussagen:

- Der Ort des Schwerpunktes liegt nach Definition (4.15) auf der Verbindungslinie der beiden Massenpunkte. Denn:

$$\begin{aligned}\vec{X} &= \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{X} &= \frac{(m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_1) + (m_2 \vec{x}_2 - m_2 \vec{x}_1)}{m_1 + m_2} \\ \vec{X} &= \vec{x}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\end{aligned}\quad (4.16)$$

In der letzten Formelzeile sieht man klar, dass der Schwerpunkt auf der Verbindungslinie zwischen den beiden Massenpunkten liegt.

- Die Orte \vec{x}_1 und \vec{x}_2 der Massenpunkte lassen sich wie folgt aus der äusseren Bewegung (Schwerpunktbewegung, \vec{X}) und der inneren Bewegung (Relativbewegung, \vec{x}) zusammensetzen

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{X} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{x} \\ \vec{x}_2 &= \vec{X} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{x}.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Herleitung der ersten Gl. [zweite Gl. analog]:

$$\begin{aligned}\vec{X} &= \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_1 - m_2 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{X} &= \vec{x}_1 - \frac{m_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{m_1 + m_2} = \vec{x}_1 - \frac{m_2 \vec{x}}{m_1 + m_2} \\ \vec{x}_1 &= \vec{X} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{x}\end{aligned}\quad (4.18)$$

- Der Schwerpunkt bewegt sich unter der Voraussetzung $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ geradlinig gleichförmig.

Denn: Für die Beschleunigung $\ddot{\vec{X}}$ des Schwerpunktes erhalten wir

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{X}} &= \frac{m_1 \ddot{\vec{x}}_1 + m_2 \ddot{\vec{x}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m_1 + m_2} = 0 \\ \ddot{\vec{X}} &= 0 \longrightarrow \vec{X}(t) = \vec{X}_0 + \vec{V}_0 t\end{aligned}\quad (4.19)$$

4.1 Übung

Wo liegt der Schwerpunkt des Systems Erde-Mond? des Systems Sonne-Erde?

Mit (4.19) ist die äussere Bewegung bekannt.

Um die Gleichung für die innere Bewegung zu erhalten, dividieren wir (4.12), (4.13) durch m_1, m_2 und subtrahieren:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{x}}_1 &= F(x) \frac{\vec{x}}{x} \longrightarrow \ddot{\vec{x}}_1 = \frac{1}{m_1} F(x) \frac{\vec{x}}{x} \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= -F(x) \frac{\vec{x}}{x} \longrightarrow \ddot{\vec{x}}_2 = -\frac{1}{m_2} F(x) \frac{\vec{x}}{x} \\ \underbrace{\ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2}_{\ddot{\vec{x}}} &= \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}_{\doteq 1/\mu} F(x) \frac{\vec{x}}{x}. \end{aligned}$$

μ heisst reduzierte Masse (siehe auch (4.2)). Die Differentialgleichung für die innere Bewegung, d.h., die Bewegungsgleichung für den Relativort \vec{x} , lautet also:

$$\mu \ddot{\vec{x}} = F(x) \frac{\vec{x}}{x}. \quad (4.20)$$

Bemerkung zu den Integrationskonstanten

Damit hat man das System der ursprünglichen 6 Differentialgleichungen (4.6) entkoppelt in die 3 Differentialgleichungen (4.19) für den Schwerpunkt, und in die 3 Differentialgleichungen (4.20) für die Relativkoordinaten. Natürlich sind die Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt sehr leicht zu lösen - in der Tat sind die Lösungen oben angegeben. [Also haben wir die Hälfte des Problems schon gelöst - wenn dies so weitergeht!] Sie enthalten die 6 Integrationskonstanten $\vec{X}(0), \dot{\vec{X}}(0)$, die den Ort und die Geschwindigkeit des Schwerpunktes zur Zeit $t = 0$ angeben. Die Lösungen der Differentialgleichungen für die Relativbewegung enthalten die restlichen 6 Integrationskonstanten. Insgesamt haben wir den folgenden Sachverhalt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_i(0), \dot{\vec{x}}_i(0) \\ i = 1, 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{X}(0), \dot{\vec{X}}(0) \\ \vec{x}(0), \dot{\vec{x}}(0) \end{array} \right\} \quad (4.21)$$

$$2 \times 3 + 2 \times 3 = 12$$

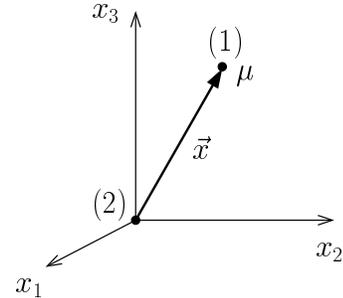
$$4 \times 3 = 12$$

Int.konstanten

□

Die Relativbewegung $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ (1 von 2 aus gesehen) erfüllt die Bewegungsgleichung eines fiktiven 1-Teilchen-Problems: der Massenpunkt μ bewegt sich im kugelsymmetrischen Kraftfeld $F(x)$.

Bei der Diskussion der Relativbewegung kann man die drei Komponenten x_k von $\vec{x}(t)$ in einem dreidimensionalen Koordinatensystem darstellen. In dieser Figur sitzt m_2 fest im Ursprung des Koordinatensystems, während sich m_1 mit der Spitze von \vec{x} bewegt. Dieses Koordinatensystem ist kein Inertialsystem, weil sich m_2 in Wirklichkeit beschleunigt bewegt. Es handelt sich bloss um eine Figur zur Relativbewegung $\vec{x}(t)$.



Anstelle der ursprünglichen 6 Ortsvariablen \vec{x}_1, \vec{x}_2 können \vec{X}, \vec{x} als die gesuchten Ortsvariablen gelten. Das eigentliche Problem liegt in der Lösung von (4.20); \vec{x}_1 und \vec{x}_2 ergeben sich dann mit (4.17).

4.2 Übung

Berechne die reduzierte Masse in den folgenden Fällen: a) $m_1 = m_2 = m$
 b) $m_2 = \infty$ c) Proton, Elektron.

4.3 Übung

Zwei gleiche Massenpunkte m sind durch eine ideale Feder verbunden (Federkonstante D).

- Wie lautet die Differentialgleichung für die innere Bewegung $\vec{x}(t)$?
- Wie lautet die allgemeine Lösung für die Komponenten $x_k(t)$ von $\vec{x}(t)$? allgemeine Lösung für $x_{1k}(t)$?
- Der Schwerpunkt sei in Ruhe. Zeige, dass sich die beiden Massenpunkte auf Kreisbahnen bewegen können (zum Beispiel in der Ebene 1,2).
- Am Anfang ruhe m_1 im Ursprung, während sich m_2 vom Punkt $\vec{x}_2(0) = (a, 0, 0)$ mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}_2(0) = (0, v_0, 0)$ wegbewegt. $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$?

Bevor wir die Lösungen der Differentialgleichungen (4.20) für die Relativbewegung diskutieren, betrachten wir Erhaltungssätze für den Drehimpuls und für die Energie.

4.4 Drehimpulserhaltung

Der totale Bahndrehimpuls ist als

$$\vec{L}_{tot} = \vec{x}_1 \times m_1 \dot{\vec{x}}_1 + \vec{x}_2 \times m_2 \dot{\vec{x}}_2 \quad (4.22)$$

definiert. Es ist nützlich, diesen Ausdruck mit Hilfe von Gl. (4.17) umzuschreiben, so dass anstelle der Koordinaten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 die Schwerpunktskoordinate \vec{X} und der Relativort \vec{x} vorkommen:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{tot} = & \left(\vec{X} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{x} \right) \times \left(m_1 \dot{\vec{X}} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{x}} \right) + \\ & \left(\vec{X} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{x} \right) \times \left(m_2 \dot{\vec{X}} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{x}} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Beim Ausmultiplizieren fallen Mischterme (wie $\vec{x} \times \dot{\vec{X}}$) raus. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \vec{L}_{tot} = \vec{X} \times \underbrace{(m_1 + m_2)}_M \dot{\vec{X}} + \vec{x} \times \dot{\vec{x}} \underbrace{\frac{(m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2)}{(m_1 + m_2)^2}}_{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu} \\ \vec{L}_{tot} = \vec{X} \times M \dot{\vec{X}} + \vec{x} \times \mu \dot{\vec{x}} = \vec{L}_S + \vec{L} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dies entspricht einer Aufspaltung in einen äusseren und einen inneren Beitrag. Ein paar Kommentare zu \vec{L}_S und \vec{L} :

- $\vec{L}_S = \vec{X} \times M \dot{\vec{X}}$. Äusserer Beitrag. Entspricht dem Bahndrehimpuls eines Massenpunktes M , welcher sich wie der Schwerpunkt bewegt. \vec{L}_S hängt von der Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems ab. Mit (4.19) folgt, dass \vec{L}_S eine erhaltene Grösse ist, denn:

$$\dot{\vec{L}}_S = \dot{\vec{X}} \times M \dot{\vec{X}} + \vec{X} \times M \underbrace{\ddot{\vec{X}}}_0 = 0. \quad (4.25)$$

- $\vec{L} = \vec{x} \times \mu \dot{\vec{x}}$. Innerer Bahndrehimpuls. Auch dieser Beitrag ist unter unseren Voraussetzungen eine erhaltene Grösse, denn:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{x}} \times \mu \dot{\vec{x}} + \vec{x} \times \underbrace{\mu \ddot{\vec{x}}}_{F(x) \frac{\vec{x}}{x}} = 0. \quad (4.26)$$

Für das Verschwinden des zweiten Termes haben wir Gl. (4.20) gebraucht.

Bemerkung: $\vec{L} = \text{konstant}$ bedeutet, dass sowohl der Betrag als auch die Richtung von \vec{L} zeitlich konstant bleibt.

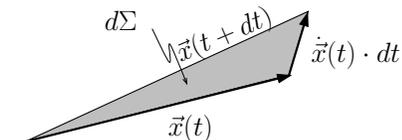
Aus $\vec{L} = \text{konstant}$ folgt:

- Die Relativbewegung ist eben: der Vektor \vec{x} bewegt sich in einer Ebene senkrecht zu \vec{L} (s. Figur, Seite 70). Grund : $\vec{L} = \vec{x} \times \mu \dot{\vec{x}}$ bedeutet, dass \vec{x} und $\dot{\vec{x}}$ senkrecht zu \vec{L} sind.
- Der Keplersche Flächensatz

Wir berechnen zuerst die während der Zeit dt überstrichene Fläche $d\Sigma$ (dt klein):

$$\vec{x}(t + dt) = \vec{x}(t) + \dot{\vec{x}}(t) dt + \dots \quad \text{Taylor}$$

$$d\Sigma = \frac{1}{2} |\vec{x} \times \dot{\vec{x}} dt| . \quad (4.27)$$



$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{x} \times \dot{\vec{x}}| = \frac{1}{2\mu} |\vec{x} \times \mu \dot{\vec{x}}| = \frac{1}{2\mu} |\vec{L}| . \quad (4.28)$$

Da \vec{L} konstant ist, folgt, dass $d\Sigma/dt$ konstant ist. D.h., in gleichen Zeiten werden gleiche Flächen überstrichen.

Der Flächensatz drückt also - in der Sprache der Mechanik - die Erhaltung von \vec{L} aus. Das zweite Keplersche Gesetz ist somit nicht spezifisch für das Gravitationsgesetz, sondern gilt allgemeiner, wenn die Kräfte die Voraussetzungen $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \parallel \vec{x}$ erfüllen.

4.4 Übung

Zwei starr verbundene Massenpunkte $m_1 = m_2 = m$ (Abstand a) rotieren frei. Umlauffrequenz ν .

- Erfüllen die Kräfte die getroffenen Voraussetzungen?
- Was heisst, die Bewegung sei eben?
- Drücke $|\vec{L}|$ in m, a, ν aus.
- Diskutiere $\vec{x}(t)$ und $\vec{x}_1(t)$ für den Fall, dass der Schwerpunkt ruht.
- Kraft?

4.5 Kinetische Energie, Potential, Totalenergie

Die totale kinetische Energie lässt sich mit (4.17) auf die Variablen \vec{X} , \vec{x} umrechnen

$$\begin{aligned}
 T_{tot} &= \frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2 \\
 &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\vec{X}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{x}} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{\vec{X}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{x}} \right)^2 \\
 &= \frac{M}{2} \dot{\vec{X}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{x}}^2 .
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Eine Funktion $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, deren Ableitung nach den Ortskoordinaten des Systems die entsprechenden Kraftkomponenten liefert, heisst *Potential*. Wir wissen bereits von 1-Teilchen-Systemen, dass nicht immer ein Potential existiert. Im 2-Teilchen-System müsste das Potential alle 6 Kraftkomponenten liefern

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= -\nabla_{\vec{x}_1} V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad , \quad F_{1k} = -\frac{\partial V}{\partial x_{1k}} \\
 \vec{F}_2 &= -\nabla_{\vec{x}_2} V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad , \quad F_{2k} = -\frac{\partial V}{\partial x_{2k}} .
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Die Kräfte der Form (4.3), d.h. $\vec{F}_1 = F(x)\vec{x}/x = -\vec{F}_2$, besitzen ein Potential. Es hängt nur von $x = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ ab

$$V = V(x) \quad , \quad x = \sqrt{(x_{11} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{22})^2 + (x_{13} - x_{23})^2} , \tag{4.31}$$

und zwar ist

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad , \quad V(x) = -\int dx F(x) \quad (\text{Stammfunktion}) . \tag{4.32}$$

Zum Nachweis berechnen wir die Ableitungen (4.30)

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial V}{\partial x_{1k}} &= -\frac{dV(x)}{dx} \frac{\partial x}{\partial x_{1k}} = F(x) \frac{x_{1k} - x_{2k}}{x} = F_{1k} \\
 -\frac{\partial V}{\partial x_{2k}} &= -\frac{dV(x)}{dx} \frac{\partial x}{\partial x_{2k}} = -F(x) \frac{x_{1k} - x_{2k}}{x} = F_{2k} .
 \end{aligned}$$

Beispiele

- Federkraft:

$$F(x) = -Dx \quad , \quad V(x) = Dx^2/2. \quad (4.33)$$

- Gravitation:

$$F(x) = -\frac{Gm_1m_2}{x^2} \quad , \quad V(x) = -\frac{Gm_1m_2}{x} = -\frac{\lambda}{x}. \quad (4.34)$$

- Coulombkräfte (Ladungen q_1, q_2):

$$F(x) = +\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \quad , \quad V(x) = +\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x}. \quad (4.35)$$

Damit sind wir vorbereitet, den Energieerhaltungssatz zu formulieren:

$$\begin{aligned} E_{tot} &= T_{tot} + V = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{x}}_2^2 + V(x) = \frac{M}{2} \dot{\vec{X}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V(x) \\ \dot{E}_{tot} &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Beweis (mit (4.30), (4.6)):

$$\dot{E}_{tot} = \underbrace{m_1 \dot{\vec{x}}_1 \cdot \ddot{\vec{x}}_1}_{\vec{F}_1 \cdot \dot{\vec{x}}_1} + \underbrace{m_2 \dot{\vec{x}}_2 \cdot \ddot{\vec{x}}_2}_{\vec{F}_2 \cdot \dot{\vec{x}}_2} + \underbrace{(\vec{\nabla}_{\vec{x}_1} V) \cdot \dot{\vec{x}}_1}_{-\vec{F}_1} + \underbrace{(\vec{\nabla}_{\vec{x}_2} V) \cdot \dot{\vec{x}}_2}_{-\vec{F}_2} = 0.$$

Die Schwerpunktsenergie $E_S = M/2 \dot{\vec{X}}^2$ ist nach (4.19) separat erhalten, denn

$$\dot{E}_S = \frac{M}{2} 2 \dot{\vec{X}} \cdot \underbrace{\ddot{\vec{X}}}_{=0} = 0.$$

Somit ist auch die innere Energie E erhalten:

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V(x) \quad , \quad \dot{E} = 0 \quad (4.37)$$

Als Übung können wir natürlich mit Hilfe der 1-Teilchen-Gleichung (4.20) auch direkt zeigen, dass die innere Energie E erhalten ist:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{\mu}{2} 2\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} + \frac{dV}{dx} \dot{x} \\ \dot{x} &= \frac{d}{dt} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 + 2x_3 \dot{x}_3}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}}{x} \\ \dot{E} &= \dot{\vec{x}} \cdot \underbrace{\mu \ddot{\vec{x}}}_{F(x)\vec{x}/x} + \underbrace{\frac{dV}{dx}}_{-F(x)} \frac{\vec{x}}{x} \cdot \dot{\vec{x}} = 0 \quad \square\end{aligned}\tag{4.38}$$

Zusammengefasst: Die Schwerpunktsenergie $E_S = M/2 \dot{\vec{X}}^2$ und die innere Energie $E = \mu/2 \dot{\vec{x}}^2 + V(x)$ sind einzeln erhalten; ihre Summe $E_{tot} = E_S + E$ ist natürlich auch erhalten.

4.5 Übung

Doppelstern, sei $m_1 = m_2 = m$. Betrachte Bewegung mit konstantem Abstand a , Schwerpunkt sei in Ruhe.

- a) Kinetische Energie? b) Potentielle Energie?
- c) Totale Energie? d) Drehimpuls? e) Totalimpuls?
- f) Geschwindigkeit? g) Umlaufzeit?

Wir gehen nun zurück zum ursprünglichen Problem: Lösung der Differentialgleichungen für die Relativkoordinaten, Gleichung (4.20).

4.6 Die innere Bewegung : Polarkoordinaten

Wir betrachten nur die innere Bewegung $\vec{x}(t)$. Sie entspricht nach (4.20) der Bewegung eines Massenpunktes μ im kugelsymmetrischen Kraftfeld $F(x)$:

$$\mu \ddot{\vec{x}} = F(x) \frac{\vec{x}}{x}.\tag{4.39}$$

Wir haben gezeigt, dass der innere Drehimpuls \vec{L} und die innere Energie E erhaltene Größen sind:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{x} \times \mu \dot{\vec{x}} \\ E &= \frac{\mu}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V(x)\end{aligned}$$

Wie bereits festgestellt, bewegt sich $\vec{x}(t)$ in der Ebene, die senkrecht zu \vec{L} steht.

Wir schreiben den Drehimpuls in Komponenten,

$$\vec{L} = \mu(x_2\dot{x}_3 - \dot{x}_2x_3, x_3\dot{x}_1 - \dot{x}_3x_1, x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2). \quad (4.40)$$

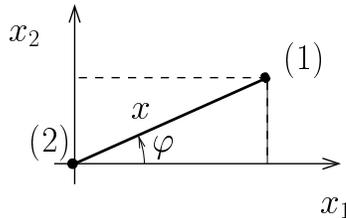
Alle Komponenten des Drehimpulses sind zeitunabhängig. Wir wählen nun die Anfangsbedingungen folgendermassen:

$$x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0. \quad (4.41)$$

Mit dieser Wahl verschwinden die zwei ersten Komponenten des Drehimpulses zur Zeit $t = 0$, und deshalb für alle t . Ausserdem verschwindet auch die dritte Komponente der Relativkoordinate für alle Zeiten (weshalb?),

$$\vec{x} = (x_1, x_2, 0); \quad \vec{L} = (0, 0, L_3); \quad \dot{L}_3 = 0 \quad (4.42)$$

Wir führen nun Polarkoordinaten x, φ ein (nach wie vor ist $x = |\vec{x}|$ der Abstand der beiden Massenpunkte)



$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi \\ x_2 &= x \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Da x_1, x_2 von der Zeit t abhängen, sind natürlich auch die Polarkoordinaten x, φ Funktionen von t .

Die kartesischen Geschwindigkeiten, die kinetische Energie T und L_3 lauten in den neuen Variablen ausgedrückt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} \cos \varphi - x \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{x}_2 &= \dot{x} \sin \varphi + x \cos \varphi \dot{\varphi} \\ T &= \frac{\mu}{2} (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2) \\ L_3 &= \mu x^2 \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Die Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $\varphi(t)$ lassen sich im Prinzip aus (4.39) gewinnen.

Einfacherer Weg: Verwenden, dass L_3 und E Konstanten sind:

$$\begin{cases} E &= \frac{\mu}{2} (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2) + V(x) \\ L_3 &= \mu x^2 \dot{\varphi} \end{cases} \quad (4.45)$$

Weil E und L_3 Konstanten sind, sind dies 2 Dgl. 1. Ordnung für die Unbekannten $x(t)$ und $\varphi(t)$.

Bemerkung zu den Integrationskonstanten

Ursprünglich:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{x}}_1 &= \vec{F}_1 = F(x) \frac{\vec{x}}{x} \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= \vec{F}_2 = -F(x) \frac{\vec{x}}{x}; \quad (\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2) \end{aligned}$$

6 Dgl. 2. Ordnung \rightarrow 12 Int.konst. Diese werden fixiert durch die Vorgaben

$$\vec{x}_1(0), \quad \dot{\vec{x}}_1(0); \quad \vec{x}_2(0), \quad \dot{\vec{x}}_2(0).$$

Dann: Umschreiben des Problems auf die Koordinaten \vec{x}, \vec{X} :

$$\ddot{\vec{X}} = 0; \quad \mu \ddot{\vec{x}} = F(x) \frac{\vec{x}}{x} \quad (4.46)$$

Lösungen festgelegt durch 12 Angaben:

$$\vec{X}(0), \quad \dot{\vec{X}}(0); \quad \vec{x}(0), \quad \dot{\vec{x}}(0).$$

Beachte, dass sich die Anfangsbedingungen in den beiden Koordinatensystemen (\vec{x}_1, \vec{x}_2) und (\vec{X}, \vec{x}) ineinander umrechnen lassen (siehe Gl. (4.15), (4.17)).

Betrachte nur noch die Relativbewegung: 6 Int.konst. $\vec{x}(0), \dot{\vec{x}}(0)$.

Wir haben $x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0$ gewählt: \rightarrow Bewegung in der $(1, 2)$ -Ebene.

Die Angabe von $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)$ fixieren

$$L_3, \quad E, \quad x_0 = x(0), \quad \varphi_0 = \varphi(0) \quad \square \quad (4.47)$$

Wir studieren im folgenden die Bewegungsgleichungen 1. Ordnung für $\varphi(t)$ und $x(t)$:

$$\begin{cases} E &= \frac{\mu}{2} (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2) + V(x) \\ L_3 &= \mu x^2 \dot{\varphi} \end{cases} \quad (4.48)$$

Wie wir sehen werden, wird die Bahnform durch die Werte von L_3 und E bestimmt.

4.6.1 Das effektive Potential: Reduktion auf ein 1-dimensionales Problem

Die zweite Gl. oben kann nach $\dot{\varphi}$ aufgelöst werden: $\dot{\varphi} = L_3/(\mu x^2)$. Einsetzen in die erste Gl. ergibt:

$$\frac{\mu}{2} \dot{x}^2 + V(x) + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{\mu x^2} = E. \quad (4.49)$$

Mit der Definition des *effektiven Potentials*

$$V_{\text{eff}}(x) = V(x) + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{\mu x^2} \quad (4.50)$$

lässt sich der Energieerhaltungssatz in der Form

$$\frac{\mu}{2} \dot{x}^2 + V_{\text{eff}}(x) = E \quad (4.51)$$

schreiben. Die zeitliche Veränderung des Abstandes $x(t)$ lässt sich somit als Resultat eines 1-dimensionalen Problems verstehen, nämlich als Bewegung eines Massenpunktes μ im effektiven Potential $V_{\text{eff}}(x)$.

Der Term $L_3^2/(2\mu x^2)$, der auf der rechten Seite von Gl. (4.50) auftritt, heisst *Zentrifugalterm* V_Z :

$$V_Z = \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{\mu x^2}.$$

Dieser Term kam rein beim Umschreiben des Energieerhaltungssatzes auf Polarkoordinaten.

Bemerkung: Für Leser, die dem Namen “Zentrifugalterm” etwas abgewinnen wollen, mag folgendes dienen: Wir leiten (4.51) nach der Zeit ab:

$$\mu \ddot{x} \dot{x} + V'(x) \dot{x} - \frac{L_3^2}{\mu x^3} \dot{x} = 0.$$

Nach Division durch \dot{x} erhalten wir

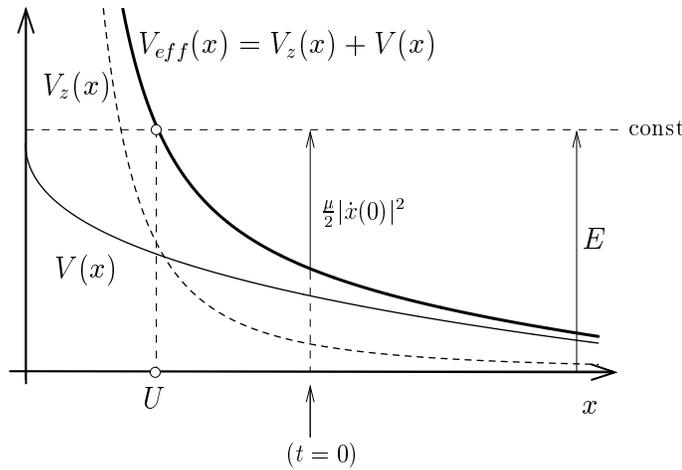
$$\mu \ddot{x} = -V'(x) + \frac{L_3^2}{\mu x^3}. \quad (4.52)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite lässt sich wie folgt interpretieren: nach (4.45) ist er gleich $\mu x \dot{\varphi}^2$, also gleich der Zentrifugalkraft im mitdrehenden System (im mitdrehenden System findet die Relativbewegung $x(t)$ zwischen den beiden Massenpunkten längs einer Geraden statt). Der Term $L_3^2/2\mu x^2$ in der Definition (4.50) von V_{eff} heisst daher das *Zentrifugalpotential*. Man beachte, dass sich im kräftefreien Fall ($V(x) = 0$) der Abstand $x(t)$ beschleunigt verändert. (Ende der Bemerkung)

Die folgenden Figuren zeigen Beispiele zur qualitativen Diskussion von $x(t)$, resp. von Gl. (4.51).

Fall 1: abstossende Kräfte: $F > 0$, $\frac{dV}{dx} < 0$

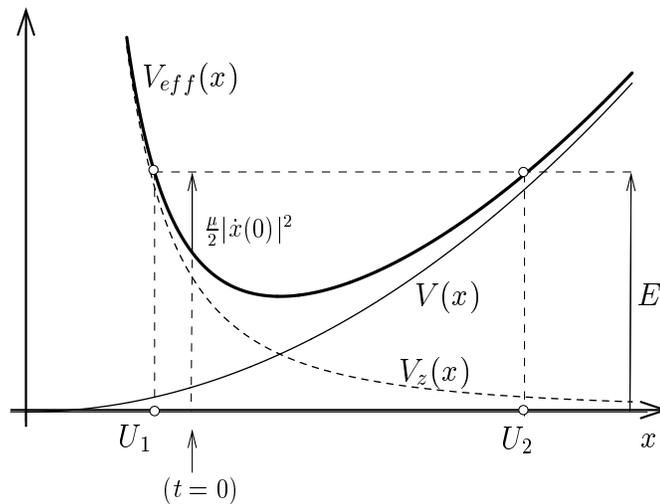
$\dot{x}(0) > 0$: Bewegung $x \rightarrow \infty$ mit wachsender Geschwindigkeit. $\dot{x}(0) < 0$:
 Bewegung mit abnehmendem x bis zum Umkehrpunkt U ; dort ist $\dot{x} = 0$. Dann
 Bewegung $x \rightarrow \infty$.



Fall 2: anziehende Kräfte : $F < 0$, $\frac{dV}{dx} > 0$

Bsp. 1: $V = D x^2/2$

Bewegung zwischen den beiden Umkehrpunkten U_1, U_2 . Gebundener Zustand.

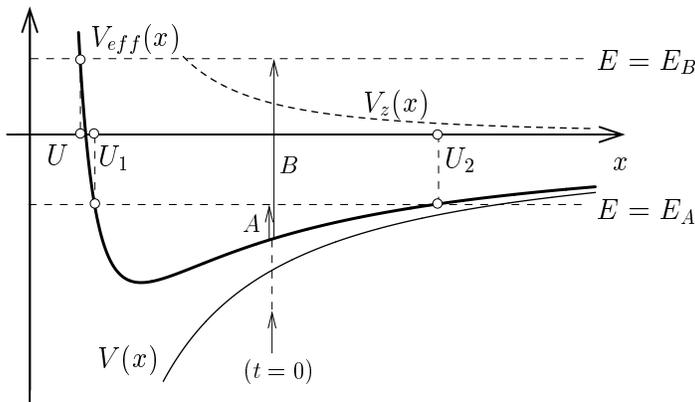


Bsp. 2: $V = -\lambda/x$, $\lambda > 0$

A: Start mit kleiner kinetischer Energie. $E = E_A < 0$. Gebundener Zustand.

Umkehrpunkte U_1, U_2 . B: Start mit grosser kinetischer Energie. $E = E_B > 0$.

Bewegung $x \rightarrow \infty$. (U Umkehrpunkt, falls $\dot{x}(0) < 0$)



4.6 Übung

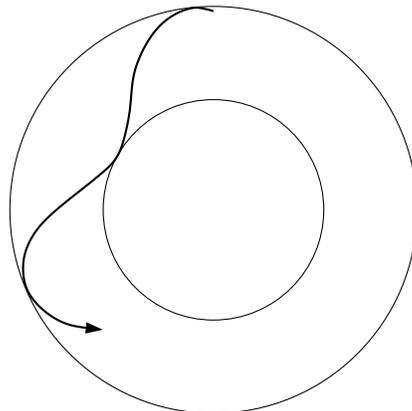
Welches sind die Folgerungen aus (4.51) oder (4.52) für Kreisbewegungen der beiden Massenpunkte um den Schwerpunkt?

4.7 Übung

In den vorstehenden Figuren haben wir die Folgerungen aus (4.51) qualitativ diskutiert. Wie löst man (4.51), um die Beziehung $x = x(t)$ oder $t = t(x)$ zu erhalten? Was muss vorgegeben werden, damit die Lösung eindeutig wird?

4.6.2 Die Bahn (allgemein, $V(x)$ beliebig)

Wir haben die Koordinatenachsen x_1, x_2 in der Bahnebene gewählt ($x_3 = 0$). Die Bahnkurve ist durch $x = x(\varphi)$ beschrieben; sie hängt vom Potential $V(x)$ ab. Für gebundene Zustände pendelt x zwischen zwei Werten hin und her (Umkehrpunkte der 1-dimensionalen Bewegung $x = x(t)$ bei anziehenden Kräften, siehe Figuren Seite 80 und Seite 81). Im allgemeinen gibt es keinen Grund, geschlossene Bahnkurven zu erwarten (Anmerkung: geschlossene Kurven ergeben sich bei den Potentialen $V \sim x^2$ und $V(x) \sim x^{-1}$).



Wir leiten im folgenden die Dgl. für die Bahnkurve $x(\varphi)$ her. Als Ausgangspunkt nehmen wir Gl. (4.45):

$$\begin{cases} E & = & \frac{\mu}{2} (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2) + V(x) \\ L_3 & = & \mu x^2 \dot{\varphi} \end{cases} \quad (4.53)$$

Betrachte $x(\varphi)$: Abstand als Funktion von φ .

φ selber ist eine Fkt. der Zeit t . Somit kann man $x(t)$ auffassen als

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\varphi(t)). \\ \rightarrow \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Unter Verwendung der zweiten Gl. in (4.53) gilt:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3}{\mu x^2}; \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\varphi} \frac{L_3}{\mu x^2}$$

Dies eingesetzt in die erste Gl. in (4.53) ergibt die gesuchte Dgl. für $x(\varphi)$:

$$\frac{\mu}{2} \frac{L_3^2}{\mu^2 x^4} \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + V(x) + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{\mu x^2} = E. \quad (4.55)$$

Wir zeigen kurz, wie man diese Dgl. löst, zuerst für allg. Potential $V(x)$ und dann für das Potential $V(x) = -\lambda/x$. Leser, die nicht an diesen technischen Dingen interessiert sind, können direkt zur Lösung (4.58) für das uns interessierende Potential $V(x) = -\lambda/x$ gehen.

(4.55) ist eine Dgl. 1. Ordnung mit trennbaren Variablen. Sie lässt sich (rein algebraisch) umschreiben in

$$\frac{dx/d\varphi}{x \sqrt{\frac{2\mu x^2}{L_3^2} [E - V(x)] - 1}} = 1. \quad (4.56)$$

Beide Seiten nach φ integrieren ergibt

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{\frac{2\mu x^2}{L_3^2} [E - V(x)] - 1}} = \varphi - \bar{\varphi}_0. \quad (4.57)$$

Hier haben wir die Integrationskonstante mit $\bar{\varphi}_0$ bezeichnet. Aus diesem Resultat ergibt sich bei gegebenem Potential im Prinzip $\varphi = \varphi(x)$; Umkehrung dieser Beziehung ergibt die Bahn in der Form $x = x(\varphi)$.

4.6.3 Die Bahnen im Potential $V(x) = -\lambda/x$

Im Falle des Gravitationspotentials (4.34) oder des Coulombpotentials (4.35) lässt sich die Bahnkurve explizite bestimmen. Dazu setzt man im Resultat (4.57) das Potential (4.34) oder (4.35) ein, geht zur neuen Variablen $u = 1/x$ über, benutzt e.g. MAPLE, um das entstehende Integral der Form

$$J = \int \frac{du}{(a + bu + cu^2)^{1/2}}$$

zu finden, geht zurück zu x und hat

$$x(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \bar{\varphi}_0)}, \quad (4.58)$$

wobei wir folgende Abkürzungen eingeführt haben:

$$p = \frac{L_3^2}{\mu\lambda}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + 2EL_3^2/(\mu\lambda^2)}. \quad (4.59)$$

Die Integrationskonstante $\bar{\varphi}_0$ ist durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)} \\ \rightarrow \bar{\varphi}_0 &= \bar{\varphi}_0(x_0, \varphi_0, E, L_3). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Dies ist die Polardarstellung von *Kegelschnitten*: trägt man gemäss (4.58) (bei festen Werten von $p, \epsilon, \bar{\varphi}_0$) den Abstand $x(\varphi)$ von einem festen Punkt F aus als Funktion der Richtung φ auf, so ergibt sich

- für $0 < \epsilon < 1$: eine Ellipse ($\epsilon = 0$: Kreis),
- für $\epsilon = 1$: eine Parabel,
- für $\epsilon > 1$: eine Hyperbel.

Siehe Anhang A für eine Kurzzusammenfassung der Geometrie der Kegelschnitte.

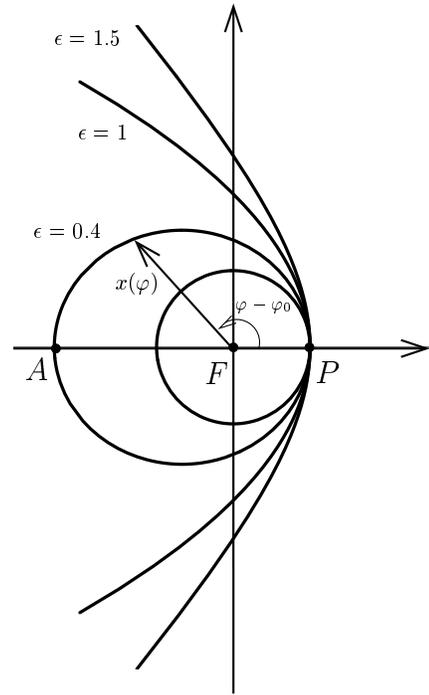
Damit ist gezeigt, dass das erste Keplersche Gesetz aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz $V \sim -1/x$ folgt.

Die Figur zeigt die Kurven (4.58) für verschiedene Werte von ϵ , bei gleichen Werten des kürzesten Abstandes

$$x_{min} = p/(1 + \epsilon) > 0.$$

Verschiedene Werte von $\bar{\varphi}_0$ ergeben verschiedene Drehlagen. In der Figur ist $\bar{\varphi}_0$ mit φ_0 bezeichnet.

ϵ heisst *Exzentrizität*.



Für $\epsilon < 1$ sind alle Abstände x endlich (\rightarrow geschlossene Kurve, Ellipse); für $\epsilon > 1$ geht x für die beiden Richtungen, welche durch $\cos(\varphi - \bar{\varphi}_0) = -1/\epsilon$ bestimmt sind, gegen ∞ (Hyperbel). Der Punkt $x = 0$ heisst *Brennpunkt*. In der obigen Skizze ist der Brennpunkt mit F bezeichnet.

4.6.4 Diskussion: Bahnkurven aus Anfangsbedingungen

In der Fortsetzung der Diskussion sind anziehende Kräfte vorausgesetzt:

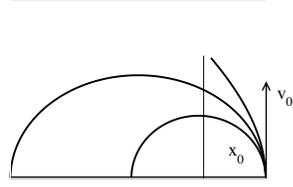
$$V(x) = -\lambda/x, \lambda > 0.$$

Im Fall $E < 0$ wissen wir von der energetischen Diskussion (Seite 81) bereits, dass x zwischen zwei Werten pendelt. Tatsächlich ergibt (4.59) in diesem Fall: $\epsilon < 1$ (Ellipse).

Im Fall $E > 0$ hat die energetische Diskussion die Bewegung $x \rightarrow \infty$ ergeben. Konsistent mit (4.59): $\epsilon > 1$, Hyperbel.

Der Fall $E = 0$ entspricht der Grenze zwischen Ellipse und Hyperbel.

Wir diskutieren nun die drei Fälle ($E < 0$, $E = 0$, $E > 0$), wie sie aus unterschiedlichen Anfangsbedingungen zustandekommen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Abstand $\vec{x}(0)$ und die Relativgeschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$ vorgegeben,



$$\vec{x}(0) = (r_0, 0, 0), \quad \dot{\vec{x}}(0) = (0, v_0, 0). \quad (4.61)$$

Wir bestimmen nun daraus die Anfangsgrößen E, L_3, x_0, φ_0 in Gleichung (4.47) und daraus die Bahnform. Wir sehen sofort (z.B. aus der Zeichnung) dass $x_0 \doteq x(0) = r_0$ und $\varphi_0 \doteq \varphi(0) = 0$. Wir werden die Bahnen für festen Wert r_0 und für verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten v_0 diskutieren. Entscheidend für die Art der Bahnkurve ist das anfängliche Verhältnis der kinetischen zur potentiellen Energie,

$$\beta = \frac{\mu v_0^2 / 2}{\lambda / r_0}. \quad (4.62)$$

Mit den gegebenen Anfangsdaten erhalten wir für E und L_3

$$\vec{L} = \vec{x} \times \mu \dot{\vec{x}} = (0, 0, \mu x_0 v_0) \rightarrow L_3 = \mu x_0 v_0. \quad (4.63)$$

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{x}}(0)^2 + V(r_0) = \mu v_0^2 / 2 - \lambda / r_0 = \frac{\lambda}{r_0} (\beta - 1). \quad (4.64)$$

Daraus finden wir ebenfalls die Parameter des Kegelschnittes:

$$p = L_3^2 / \mu \lambda = \frac{\mu x_0^2 v_0^2}{\lambda}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + 2EL_3^2 / (\mu \lambda^2)} = \sqrt{(1 - 2\beta)^2} = |1 - 2\beta|. \quad (4.65)$$

Die verschiedenen Kegelschnitte ergeben sich wie folgt:

- $\boxed{\beta < 1} : E < 0 ; \epsilon < 1$. Bahnkurve: Ellipse.
Gebundener Zustand. Siehe Seite 81: x pendelt zwischen einem Minimum und einem Maximum.
Speziell: $\beta = 1/2 : \epsilon = 0$, Kreis.
- $\boxed{\beta = 1} : E = 0 ; \epsilon = 1$. Bahnkurve: Parabel.
Die anfängliche kinetische Energie reicht exakt aus, um das Potential zu überwinden ($x \rightarrow \infty$).
- $\boxed{\beta > 1} : E > 0 ; \epsilon > 1$. Bahnkurve: Hyperbel.
 $x \rightarrow \infty$, ohne dass die Geschwindigkeit gegen Null geht.

4.8 Übung

- (a) Mit welcher Geschwindigkeit muss eine Rakete von der Erdoberfläche starten, damit sie aus dem Gravitationsfeld der Erde entweichen kann? Spielt die Abschussrichtung eine Rolle? (Ohne Berücksichtigung der Sonne).
- (b) Betrachte Erde allein, und bestimme die Fluchtgeschwindigkeit eines Körpers als Funktion des Erdradius, bei fester, vorgegebener Masse der Erde. Wie gross müsste der Erdradius sein, damit die Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit wird? [Dieser Radius heisst *Schwarzschildradius*.]

4.9 Übung

Betrachte die Bewegung zweier Sterne mit den Massen $m_1 = M_\odot = 2m_2$. Der Schwerpunkt falle mit dem Ursprung des Inertialsystems zusammen, $\vec{X} = 0$, $\dot{\vec{X}} = 0$, der Drehimpuls weise in die Richtung der z -Achse, wie oben angenommen. Die Anfangsbedingungen sind wie oben (4.61).

- (a) Integriere mit MAPLE die Dgl. (4.45) mit geeignetem v_0 so, dass die Bahnen durch i) eine Ellipse ii) eine Hyperbel beschrieben werden. Bestimme daraus die Koordinaten $\vec{x}_{1,2}$ nach (4.17) und stelle die Lage $\vec{x}_{1,2}$ der Sterne dar (in der Ebene senkrecht zum Drehimpuls) für verschiedene Zeiten, so dass der Bewegungsablauf ersichtlich wird.
- (b) Das Gravitationspotential laute

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{x} \left[\frac{r_0}{x} \right]^{0.2}, \quad (4.66)$$

wobei r_0 in (4.61) gegeben sei. Sind die Bahnen wiederum Kegelschnitte? Integriere mit MAPLE die Dgl. (4.45) für ein festes v_0 . Bestimme daraus die Koordinaten $\vec{x}_{1,2}$ nach (4.17) und stelle die Lage $\vec{x}_{1,2}$ der Sterne dar (in der Ebene senkrecht zum Drehimpuls) für verschiedene Zeiten, so dass der Bewegungsablauf ersichtlich wird.

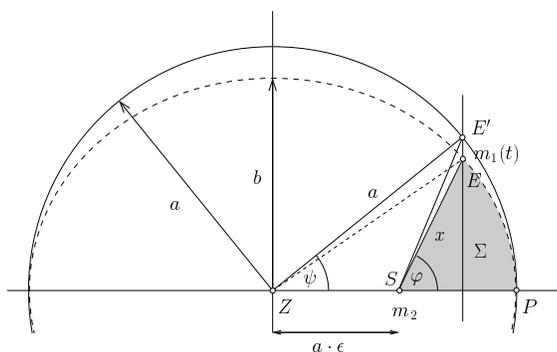
In a) und b): Ansprechende Darstellung erarbeiten, Graphik mit MAPLE erstellen.

4.6.5 Planetenbewegung: die Zeitgleichung

Im vorangehenden Abschnitt haben wir für das Potential $V(x) = -\lambda/x$ die Bahnkurven untersucht. Für $E < 0$ ergeben sich die Kepler-Ellipsen (1. Keplersches

Gesetz). Dabei interessiert nur die Geometrie der Bahnkurve, und nicht der zeitliche Verlauf der Bewegung. Der zeitliche Verlauf der Bewegung ergibt sich zum Beispiel aus der numerischen Integration der Differentialgleichungen (4.45), siehe die Übung 4.9. Man kann sich auch eines anderen Verfahrens bedienen, welches direkt an den Flächensatz anknüpft, nämlich der *Zeitgleichung* (4.69). Für Interessierte ist nachfolgend deren Herleitung gegeben. In der Vorlesung überspringen wir dieses Unterkapitel und gehen direkt zu 4.6.6.

Die Bahnelemente a (grosse Halbachse), ϵ (Exzentrizität) und T (Umlaufzeit) seien bekannt. Wir legen die erste Achse durch den sonnennächsten Punkt (das *Perihel*), so dass $\phi_0 = 0$ und im Perihel $\phi = 0$. Wir bezeichnen den Zeitpunkt des letzten Periheldurchganges mit $t = 0$. Gesucht ist der Ort φ zum Zeitpunkt t .



a) Aus dem Flächensatz (4.28) erhalten wir mit der Umlaufzeit T

$$\frac{\pi a b}{T} = \frac{L_3}{2\mu}, \quad \text{oder} \quad T = \frac{2\pi}{L_3} a b \mu. \quad (4.67)$$

b) Der Zusammenhang zwischen φ und ψ ist rein geometrisch

$$\frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} \cos \varphi + a \epsilon = a \cos \psi$$

$$\text{oder} \quad \cos \varphi = \frac{a (\cos \psi - \epsilon)}{p - \epsilon a (\cos \psi - \epsilon)}. \quad (4.68)$$

c) Schliesslich mit dem Flächensatz

$$\Sigma = \frac{t}{T} \pi a b,$$

$$\frac{b}{a} (\Delta Z P E' - \Delta Z S E') = \Sigma,$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} a^2 \psi - \frac{1}{2} a \epsilon a \sin \psi \right) &= \frac{t}{T} \pi a b, \\ \psi - \epsilon \sin \psi &= 2 \pi \frac{t}{T}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Dies ist die Zeitgleichung. Sie lässt sich für einen gegebenen Wert von t iterativ lösen

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 2 \pi \frac{t}{T} \\ \psi_n &= 2 \pi \frac{t}{T} + \epsilon \sin \psi_{n-1}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Die Folge $\{\psi_n\}$ der Näherungen konvergiert rasch. Aus ψ ergibt sich φ mithilfe (4.68).

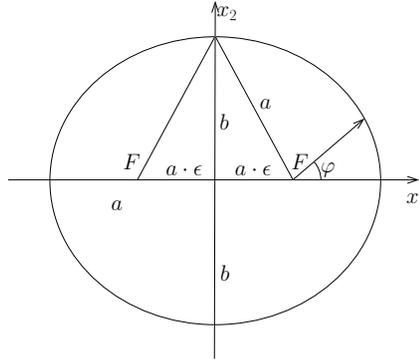
4.10 Übung

Die Erde ist ungefähr am 3. Januar im Perihel ihrer Bahn um die Sonne. Wie viele Tage dauert es, bis die Sonne sich von der Erde aus gesehen in bezug auf die Fixsterne um 90° bewegt hat?

4.6.6 Planetenbewegung: die Keplerschen Gesetze

Die Keplerschen Gesetze folgen aus dem Gravitationsgesetz $V(x) = -\lambda/x$. Siehe Abschnitt 4.6.3 für das erste K.G. (Planetenbahnen sind Ellipsen, Sonne in einem Brennpunkt). Für das zweite K.G. genügt die Annahme von Zentralkräften (siehe (4.28)). Das dritte K.G. lautet $T^2 \sim a^3$, wobei T die Umlaufzeit und a die grosse Halbachse der Bahn ist. Zum Beispiel beträgt die Umlaufzeit von Jupiter 11.86 Jahre, aber die grosse Halbachse seiner Bahn ist nur 5.20 mal grösser als jene der Erdbahn.

Bevor wir das dritte K.G. herleiten, ist es nützlich, etwas *Ellipsengymnastik* zu machen.



In der Skizze sitzt die Sonne im Brennpunkt F und der Planet bewegt sich auf der Ellipsenlinie. Wir haben die Koordinaten so gelegt, dass der sonnennächste Punkt auf der x_1 -Achse liegt. Die Polarform der Ellipsenlinie lautet dann

$$x(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$$

a und b in der Skizze heissen grosse und kleine Halbachse.

Der Flächeninhalt der Ellipse ist $\Sigma = a b \pi$ (ohne Herleitung).

Für die Herleitung des dritten Keplerschen Gesetzes ist es nützlich, die Parameter p und b mit a und ϵ auszudrücken.

Es gilt, wie wir aus der Skizze sofort sehen: $x(0) + x(\pi) = 2a$, also

$$2a = p/(1 + \epsilon) + p/(1 - \epsilon) \longrightarrow p = a(1 - \epsilon^2).$$

Wie ebenfalls aus der Zeichnung ersichtlich, ist der maximale Wert von x_2 gerade b . Wir berechnen den Winkel φ , bei dem x_2 maximal wird:

$$x_2 = \frac{p \sin(\varphi)}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$$

$$\frac{dx_2}{d\varphi} = \frac{(1 + \epsilon \cos(\varphi)) p \cos(\varphi) - p \sin(\varphi) \epsilon (-\sin(\varphi))}{(1 + \epsilon \cos(\varphi))^2} = \frac{p \cos(\varphi) + p\epsilon}{(1 + \epsilon \cos(\varphi))^2} \stackrel{!}{=} 0$$

Also ist $\cos(\varphi) = -\epsilon$ und somit $\sin(\varphi) = \sqrt{1 - \epsilon^2}$. Für b bekommen wir

$$b = \frac{p \sqrt{1 - \epsilon^2}}{1 - \epsilon^2} = a \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad \square$$

Zur Herleitung des dritten K.G.: Wir knüpfen an den Flächensatz an (siehe Gl. (4.28)). Dieser lautet

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{2\mu} |L_3|.$$

Während der Umlaufzeit T wird die gesamte Ellipsenfläche $ab\pi$ überstrichen. Da $d\Sigma/dt$ konstant ist, gilt demzufolge auch $d\Sigma/dt = (ab\pi)/T$, also

$$\frac{ab\pi}{T} = \frac{1}{2\mu} |L_3| \longrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 \mu^2}{L_3^2}$$

Gl. (4.59) sagt, dass $L_3^2 = p\mu\lambda$. Verwendet man zudem die Beziehungen $p = a(1 - \epsilon^2)$ und $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$ aus der Geometrie der Ellipse und setzt $\lambda = mMG$ sowie $\mu = Mm/(M + m)$, erhält man

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \frac{1}{1 + m/M}, \quad (4.71)$$

wobei M die Sonnenmasse und m die Planetenmasse ist. Das dritte Keplersche Gesetz gilt also nur in der Grenze $m/M \rightarrow 0$ exakt (die Jupitermasse beträgt ca. 1/1000, die Erdmasse ca. 1/300'000 der Sonnenmasse).

Im übrigen sind in der vorliegenden Behandlung der Planetenbewegung als Zweikörperproblem ohnehin verschiedene Effekte nicht berücksichtigt: (i) Gravitationskräfte der Planeten (und Monde) untereinander, (ii) allgemeine Relativitätstheorie, (iii) Die Körper sind nicht Punktmassen; insbesondere ist das Quadrupolmoment der Sonne zu berücksichtigen.

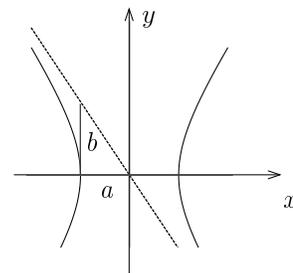
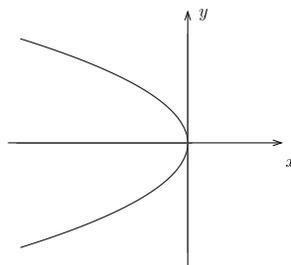
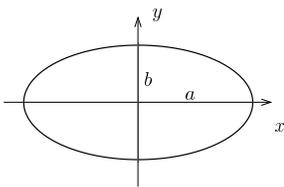
4.11 Übung

Leite (4.71) her.

A Geometrie der Ellipse, Parabel und Hyperbel

A.1 Darstellung in der Form $f(x, y) = 0$

Wir betrachten die folgenden Darstellungen der Ellipse, Parabel und Hyperbel:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = -2px$$

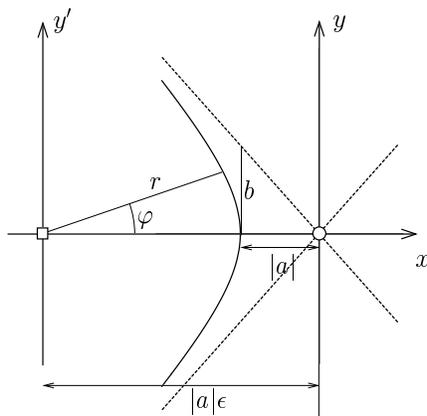
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(A.1)

A.2 Polardarstellung

Die *Polardarstellung* dieser Kegelschnitte lautet

$$\begin{aligned} x' &= r(\varphi) \cos \varphi, \quad y' = r(\varphi) \sin \varphi, \\ r(\varphi) &= \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}; \quad p > 0, \epsilon > 0 \text{ fest}; \quad \varphi \text{ variabel.} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$



Behauptung: Durch geeignete Wahl eines neuen Koordinatensystems

$$x = x' + c, \quad y' = y \quad (\text{A.3})$$

geht die Polardarstellung (A.2) in eine der Formen (A.1) über.

Beweis: Aus (A.2) folgt

$$x'^2 + y'^2 = (x - c)^2 + y^2 = r^2. \quad (\text{A.4})$$

Andererseits gilt $r(1 + \epsilon \cos \varphi) = r + \epsilon x' = p$, oder

$$r = p - \epsilon(x - c) \quad (\text{A.5})$$

und damit

$$(x - c)^2 + y^2 = (p + \epsilon c - \epsilon x)^2. \quad (\text{A.6})$$

Wir wählen nun die Konstante c so, dass in dieser Gleichung keine in x linearen Terme auftreten,

$$c(1 - \epsilon^2) = \epsilon p \quad (\text{A.7})$$

und damit

$$c^2 + x^2 + y^2 = (p + \epsilon c)^2 + \epsilon^2 x^2 \quad (\text{A.8})$$

Mit der Abkürzung

$$\frac{p}{1 - \epsilon^2} \doteq a \quad (\text{A.9})$$

wird damit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \epsilon^2)} = 1. \quad (\text{A.10})$$

Dies stimmt für $\epsilon \neq 1$ mit der Gleichung für die Ellipse/Hyperbel überein. Falls $\epsilon = 1$, so wählt man $c = -p/2$, und erhält

$$y^2 = -2px. \quad (\text{A.11})$$

Bemerkungen:

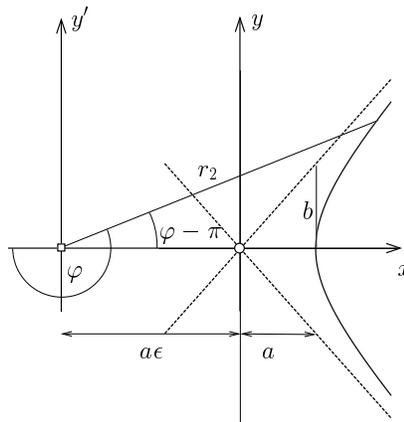
1. Betrachte den Fall $\epsilon > 1$. Wir haben oben φ nur über einen Bereich laufen lassen, in dem $r(\varphi) > 0$. Wir könnten φ über alle Werte laufen lassen - die Darstellung würde dann beide Äste der Hyperbel liefern. Allerdings ist dann beim zweiten Ast $r(\varphi) < 0$ - da wir in den Anwendungen $r = |\vec{x}|$ gesetzt haben, macht dies nicht viel Sinn. Im mathematischen Sinn erzeugt man aber, wie gesagt, beide Äste mit der Darstellung (A.2), siehe auch Übung A.2
2. Man kann den zweiten Ast auch so finden: Sei $p < 0$. Setze

$$\begin{aligned} x' &= r_2 \cos(\varphi - \pi), \quad y' = r_2 \sin(\varphi - \pi) \\ r_2 &= \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}; \quad p < 0, \quad r_2 > 0. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Die Transformation zu neuen Koordinaten lautet nun

$$x = x' - \epsilon p / (1 - \epsilon^2). \quad (\text{A.13})$$

Siehe untenstehende Figur. Hier ist r_2 positiv.



A.1 Übung

Die Koordinaten x, y einer Ellipse erfüllen die Gleichung (siehe untenstehende Figur)

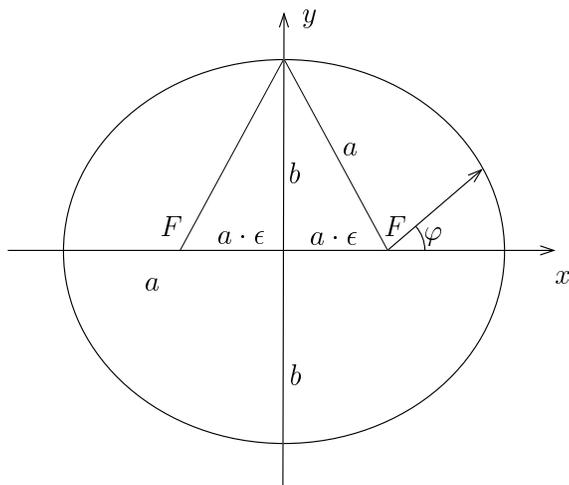
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{A.14})$$

wenn die Hauptachsen auf den Koordinatenachsen x, y liegen. a, b sind die gegebenen Halbachsen; sei hier $a \geq b$. Aus a, b sind definiert:

die Exzentrizität $\epsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}$, und die Lage der Brennpunkte $F = (\pm a\epsilon, 0)$.

Die Punkte $y = 0$ heissen Hauptscheitel, die Punkte $x = 0$ Nebenscheitel.

- Beweise: der Abstand Brennpunkt–Nebenscheitel ist gleich a .
- Die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten ist gleich $2a$.
- Beschreibe den Fall $\epsilon = 0$.
- Untersuche den Grenzfall $\epsilon \rightarrow 1$.



A.2 Übung

MAPLE benutzen!

Kegelschnitte in der Polardarstellung

$$r(\varphi) = \frac{x_0(1 + \epsilon)}{1 + \epsilon \cos \varphi}. \quad (\text{A.15})$$

$p = x_0(1 + \epsilon)$ ist so gewählt, dass die Distanz $x(0)$ des Punktes $\varphi = 0$ unabhängig von ϵ ist.

a) Skizziere diese Kegelschnitte für $x_0 = 4\text{cm}$ und $\epsilon = 0, \epsilon = 0.3, \epsilon = 1, \epsilon = 1.5$. Insbesondere ist die Lage der Punkte $\varphi = \pi/2$ und die Schnitte mit Achsen zu berechnen.

b) Zeige: Die Darstellung

$$r = p/(1 + \epsilon \cos \varphi),$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi; p > 0,$$

bildet beide Äste der Hyperbel im Fall $\epsilon = 1.5$, wenn $\varphi \in [0, 2\pi]$ läuft. Grafik!
 $a, b = ?$

5 Das Relativitätsprinzip

5.1 Postulate der klassischen Mechanik

Die Grundgesetze der Mechanik (Prototyp: Gesetze der Himmelsmechanik) haben die folgenden allgemeinen Eigenschaften:

- (1) Es gibt Bezugssysteme (BS), in welchen die Naturgesetze besonders einfache Form aufweisen. Diese ausgezeichneten BS heissen Inertialsysteme (IS). [Allgemein ist ein BS eine Abbildung, die jedem Ereignis 4 Zahlen zuordnet. Ereignis $\leftrightarrow (\vec{x}, t)$.]
- (2) Relativitätsprinzip: Die Naturgesetze haben in allen IS dieselbe Form. In anderen Worten: Die Grundgesetze der Mechanik zeichnen keines der IS aus.
- (3) In jedem IS gilt die euklidische Geometrie. Die Distanz von zwei gleichzeitigen Ereignissen (\vec{x}_1, t) , (\vec{x}_2, t) beträgt

$$d = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

- (4) Universale Zeit: Die Zeit, die zwischen zwei gegebenen Ereignissen verstreicht, ist in allen IS gleich gross. Sind zwei Ereignisse gleichzeitig in einem IS, so sind sie dies in jedem IS. In diesem Fall weisen sie auch in allen IS dieselbe Distanz auf.
- (5) Kräftefreie Bewegung: Bewegt sich ein Massenpunkt in einem IS geradlinig gleichförmig, so tut er dies in jedem IS.

Aus diesen Postulaten kann die Abbildung bestimmt werden, die die Koordinaten eines IS mit den Koordinaten eines andern verknüpft (Galileitransformation, siehe Kapitel 7.7).

Um nicht den Eindruck zu erwecken, die Relativitätstheorie befasse sich vorwiegend mit der Synchronisation von Uhren und dem korrekten Setzen von Strichen in Transformationsgleichungen, verzichten wir in diesem und dem nächsten Kapitel auf die explizite Verwendung verschiedener Bezugssysteme und arbeiten im folgenden stets mit einem einzigen IS (\vec{x}, t) .

5.2 Universale Zeit – Universale Lichtgeschwindigkeit

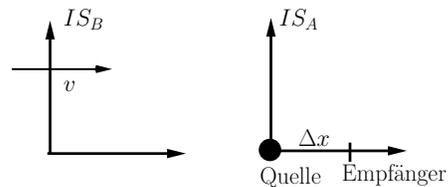
Experimentelle Tatsache: Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht ist in allen IS in allen Raumrichtungen diesselbe. Wir nennen diesen Sachverhalt das *Naturgesetz der Lichtausbreitung*.

Das Naturgesetz der Lichtausbreitung zeichnet also keines der IS aus und genügt somit automatisch dem Relativitätsprinzip (2).

Wir zeigen, dass die übrigen Postulate dem widersprechen. Sie implizieren nämlich, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit höchstens in einem IS A in allen Himmelsrichtungen denselben Wert c haben kann.

Betrachte dazu die folgende Situation: Eine Lichtquelle sitze im Ursprung des IS A; sie sende zur Zeit $t = 0$ einen Lichtblitz in positive x -Richtung aus. Nach der Zeit Δt erreiche dieser den Empfänger an der Position Δx . A misst die Geschwindigkeit

$$c_A = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Ein Beobachter B soll sich gegenüber A in die positive x -Richtung bewegen mit Geschwindigkeit v . Nach dem Postulat (4) ist für B die Zeit zwischen Emission und Empfang auch Δt ; B beurteilt aber die Strecke anders, weil er sich ja in der Zwischenzeit gegenüber A bewegt hat. Falls $v = c_A$, ist für den Beobachter B die Wegstrecke, die das Licht zurückgelegt hat, gerade Null, d.h. $c_B = 0$.

\implies Wenn man also das Naturgesetz der Lichtausbreitung mit einbezieht, sind die Postulate (1) – (5) widersprüchlich.

Einstein hat darauf hingewiesen, dass man das Postulat (4) der universalen Zeit aufgeben muss und dieses ersetzen soll durch (4*):

(4*) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht ist in allen IS in allen Richtungen dieselbe:

$$c = 2.99792458(1.2) \cdot 10^8 \text{m/sec} .$$

Bem.: Für die Lichtausbreitung gilt dann das Relativitätsprinzip wegen (4*) trivialerweise. Für die anderen Naturgesetze bleibt es aber eine echte Forderung.

Bem.: Die Postulate (1, 2, 3, 4*, 5) legen die Abbildung zwischen den Koordinaten zweier IS eindeutig fest.

Wir werden diese Koordinatentransformationen, die sog. *Lorentztransformationen*, im Kapitel 7 herleiten.

Bevor wir dies tun, diskutieren wir eine Reihe von einfachen Konsequenzen, die experimentell direkt überprüfbar sind.

5.3 Dopplereffekt

Eine Lichtquelle A und ein Spektrometer A ruhen im Labor. Eine Kopie dieser Geräte B fliegt mit der Geschwindigkeit v durch das Labor.

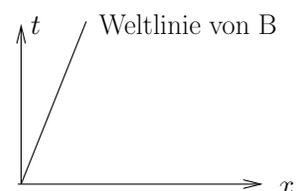
Quelle A emittiert Spektrallinie der Frequenz ν_0 . Im Spektrometer B erscheint diese Linie rot verschoben bei der Frequenz ν_1 .

Relativitätsprinzip: Emittiert die Quelle B dieselbe Spektrallinie (Frequenz ν_0 , dann zeigt sie sich im Spektrometer A an der rot verschobenen Stelle ν_1 .

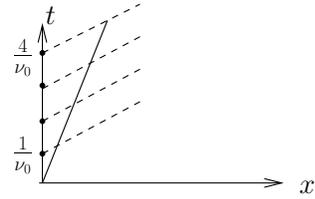
Wir beschreiben nun das Empfangen und Absenden von Lichtsignalen in B.

Interpretation dieser Prozesse im Laborsystem A :

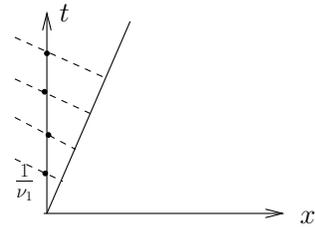
1.) B bewegt sich auf der Weltlinie $x = vt$



2.) Die Quelle A emittiert Wellenberge (Blitze) zur Zeit $t = n/\nu_0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Die Weltlinien dieser Wellenberge werden durch $x = c(t - n/\nu_0)$ beschrieben. Sie erreichen das Spektrometer B zur Zeit $vt = c(t - \frac{n}{\nu_0}) \rightarrow t = \frac{c}{c-v} \frac{n}{\nu_0}$.



3.) Das Spektrometer A empfängt die von der Quelle B emittierten Wellenberge zur Zeit $t = n/\nu_1$ ($n = 0, 1, \dots$). Die Weltlinien dieser Wellenberge sind durch $x = -c(t - \frac{n}{\nu_1})$ beschrieben. Sie haben somit die Quelle B zur Zeit $vt = -c(t - \frac{n}{\nu_1}) \rightarrow t = \frac{c}{c+v} \frac{n}{\nu_1}$ verlassen.



Beurteilung der Aktivität von B durch A

B emittiert pro Sekunde $\frac{c+v}{c} \nu_1$ Wellenberge

B empfängt pro Sekunde $\frac{c-v}{c} \nu_0$ Wellenberge

B emittiert somit $\frac{c+v}{c-v} \frac{\nu_1}{\nu_0}$ mal mehr Wellenberge als er in der gleichen Zeit empfängt. Dieses Verhältnis muss mit der Aussage von B übereinstimmen, wonach er in einem beliebigen Zeitintervall T die Anzahl $\nu_0 T$ Berge emittiert und $\nu_1 T$ Berge empfängt:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{c+v}{c-v} \frac{\nu_1}{\nu_0}$$

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu_0 \quad \text{Relativistische Dopplerformel} \quad (5.1)$$

Wir haben die Formel für die Situation hergeleitet, wo sich die Quelle (Frequenz ν_0) und der Empfänger *voneinander weg bewegen*. Der Empfänger sieht rotverschobene Signale der Frequenz ν_1 .

Diese Konsequenz aus dem Relativitätsprinzip kann direkt überprüft werden, indem die Rotverschiebung der Strahlung einer sich mit der Geschwindigkeit v bewegenden Quelle gemessen wird.

Beispiel: Wenn ein ruhendes π^0 -Meson zerfällt, emittiert es zwei γ -Quanten der Energie $h\nu_0$. Zerfällt das Pion im Flug und wird eines der Photonen entgegenge-

setzt zur Flugrichtung emittiert, dann muss seine Energie den Wert

$$E_1 = h\nu_1 = h \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu_0 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} E_0$$

aufweisen. Diese Aussage wurde an Teilchenbeschleunigern bestätigt; wenn v nahe bei c liegt, genügt bereits bescheidene Präzision, um allfällige Abweichungen festzustellen und z. B. die klassische Dopplerformel

$$\nu_1 = \frac{c}{c+v} \nu_0$$

auszuschliessen.

Falls sich Sender und Empfänger *aufeinander zu* bewegen mit Relativgeschwindigkeit v , gilt:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \nu_0 \longrightarrow \nu_1 > \nu_0 \leftrightarrow \text{Blauverschiebung} \quad (5.2)$$

Übung: Ruhende He^+ -Ionen emittieren beim Übergang vom 1. angeregten Zustand in den Grundzustand eine Spektrallinie der Wellenlänge $\lambda = 303.6$. Um wieviel verschiebt sich diese Wellenlänge, wenn dieselbe Linie in einem Ionenstrahl emittiert wird, der über eine Spannung von 10 Kilovolt beschleunigt wurde (Emission vorwärts, rückwärts)?

5.4 Zeitdilatation

Nach der im letzten Abschnitt durchgeführten Rechnung stellt A fest, dass B pro Sekunde

$$\frac{c+v}{c} \nu_1 = \frac{c+v}{c} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \nu_0$$

Wellenberge aussendet.

A sagt: B emittiert $\sqrt{1 - v^2/c^2} \nu_0$ Wellenberge pro Sek. [A bezieht seine Aussage auf Uhren, die fest mit dem System A verbunden sind.]

B sagt: Ich emittiere ν_0 Wellenberge pro Sek. [B bezieht sich dabei auf Uhren, die fest mit dem System B verbunden sind.]

Die beiden Aussagen stehen *nicht* miteinander im Widerspruch, sondern führt uns zu folgender

Interpretation: Eine bewegte Quelle schwingt um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ langsamer als die gleiche ruhende Quelle.

Beachte: Der Sachverhalt steht natürlich im Widerspruch zum Postulat der universalen Zeit, wonach die Messung von Zeitintervallen (und somit Frequenzen) in allen IS auf denselben Wert führt. Dieses Postulat haben wir aber aufgegeben!

Damit die Physik für B in jeder Beziehung dieselbe wird wie für A, müssen sämtliche charakteristischen Frequenzen materieller Systeme um denselben Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ verringert und alle Zeitintervalle um den Faktor $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ dilatiert werden.

Beispiel: Instabiles Teilchen, das im System B ruhen soll, habe in diesem System eine Zerfallszeit T_{Ruhe} . Im Laborsystem A bewegt sich dieses Teilchen mit Geschw. v . Die Zerfallszeit T_{Flug} des Teilchens im Laborsystem beträgt nach obigem

$$T_{\text{Flug}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} T_{\text{Ruhe}} .$$

Auch diese Aussage kann direkt verifiziert werden, sei es an künstlich beschleunigten Teilchen oder anhand des Zerfalls von Teilchen der kosmischen Strahlung.

Müonen-Komponente der kosmischen Strahlung (Lit.: A.P. French, Spezielle Relativitätstheorie, Uni-Text, Vieweg, Kap. 4).

- Lebensdauer gestoppter Müonen (Zerfall in Ruhe):

$$T_0 = 2.19 \cdot 10^{-6} \text{ sec} .$$

- Die auf Meereshöhe registrierten Müonen der kosmischen Strahlung stammen fast ausschliesslich aus den obersten Schichten der Atmosphäre. (Werden dort durch die Primärteilchen der kosmischen Strahlung in Stößen mit atmosphärischen Kernen erzeugt.)
- Während der Zeit T_0 fliegt ein Müon, selbst wenn es praktisch Lichtgeschwindigkeit besitzt, höchstens $cT_0 = 660 \text{ m}$.

- Voraussetzungen: 1.) Zwischen einer Meereshöhe von 3500 m (Jungfraujoch) und einer Höhe von 500 m (Bern) werden praktisch keine neuen Müonen erzeugt. 2.) Angenommen, die Lebensdauer fliegender Müonen wäre ebenfalls T_0 (statt $T_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ wie es die Relativitätstheorie verlangt).
- Konsequenz: Zwischen 3500 m und 500 m gehen Müonen verloren, einerseits wegen des natürlichen Zerfalls, andererseits, weil Müonen in der Atmosphäre gestoppt werden können. Die pro m^2 und Sekunde in Bern registrierte Anzahl N_B von Müonen muss mindestens (nur Zerfall berücksichtigt) um den Faktor e^{-T/T_0} kleiner sein als die entsprechende

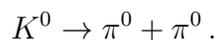
$$N_B \leq e^{-\frac{h}{cT_0}} N_J$$

auf dem Jungfraujoch gemessene Anzahl N_J ; $h = 3000$ m; $e^{-h/(cT_0)} = e^{-4.5} = 0.01$. Tatsächlich beobachtet man aber in Bern etwa halb so viele Müonen wie auf dem Jungfraujoch!

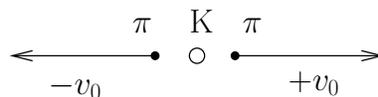
- Konsequenz: Eine der Voraussetzungen muss falsch sein. Die erste kann experimentell direkt untersucht werden, ist korrekt. Es bleibt nur: die Zerfallszeit eines fliegenden Müons muss wesentlich grösser sein als die Zerfallszeit ruhender Müonen, in Übereinstimmung mit der Relativitätstheorie.

5.5 Addition paralleler Geschwindigkeiten, c als Grenzwertgeschwindigkeit

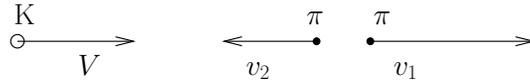
Betrachte den Zerfall von K-Mesonen in zwei π^0 -Mesonen



Zerfällt das K-Meson in Ruhe, so werden die beiden π -Mesonen mit der Geschwindigkeit $\pm v_0$ emittiert

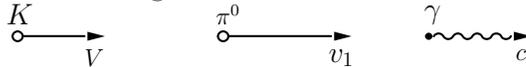


Wie gross sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der π -Mesonen, wenn das K im Flug mit der Geschwindigkeit V zerfällt (Zerfall \parallel Flugrichtung)? Die klassische Antwort wäre: $v_1 = V + v_0$, $v_2 = V - v_0$.



Diskussion auf Grund der Dopplerformel:

- Die π -Mesonen zerfallen in zwei Photonen.
- Die Frequenz der Photonen, welche von einem ruhenden π^0 emittiert werden, sei ν_0 .
- Betrachte einen Zerfall $K \rightarrow \pi^0 + \pi^0$, $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, bei dem sich alle Teilchen parallel zur x -Achse bewegen.



Untersuche nur das eine der beiden π^0 und von den beiden γ , die in seinem Zerfall entstehen, nur das nach rechts laufende Photon.

- Frequenz des Photons im Labor:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{c + v_1}{c - v_1}} \nu_0 \quad (5.3)$$

- Zerfällt das K in Ruhe, so ist die Geschw. des π^0 v_0 . Frequenz des Photons in diesem Fall

$$\bar{\nu} = \sqrt{\frac{c + v_0}{c - v_0}} \nu_0$$

- Vergiss, dass in der Zwischenstufe π -Mesonen auftreten. Betrachte K als Quelle, die Photonen emittiert.

So gesehen emittiert eine ruhendes K ein Photon der Frequenz $\bar{\nu}$. Wenn sich K mit der Geschw. V bewegt, hat dieses Photon die Frequenz

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{c + V}{c - V}} \bar{\nu} \quad (5.4)$$

- Konsequenz: (5.3) und (5.4) sprechen beide über ν_1 . Gleichsetzen und kürzen von ν_0 ergibt:

$$\sqrt{\frac{c + v_1}{c - v_1}} = \sqrt{\frac{c + V}{c - V}} \cdot \sqrt{\frac{c + v_0}{c - v_0}}$$

- Auflösung nach v_1 ergibt:

$$v_1 = \frac{V + v_0}{1 + \frac{Vv_0}{c^2}} \quad \text{rel. Addition von } V \text{ und } v_0 \quad (5.5)$$

V : K im Labor; v_0 : π relativ K; v_1 : π im Labor

Das Resultat zeigt, dass die in der klassischen Mechanik gültige vektorielle Addition von Geschwindigkeiten, $v_1 = V + v_0$ für Geschwindigkeiten, die vergleichbar sind mit der Lichtgeschwindigkeit, modifiziert werden muss. Die zusammengesetzte Geschwindigkeit ist um den Faktor $\left(1 + \frac{Vv_0}{c^2}\right)^{-1}$ kleiner als nach der klassischen Formel.

Übung: Zeige folgende Aussage: Solange V und v_0 kleiner sind als c , ist auch ihre relativistische Summe kleiner als c .

Übung: Liegen die zu addierenden Geschwindigkeiten sehr nahe bei c , $v_1 = c(1 - \varepsilon_1)$, $v_2 = c(1 - \varepsilon_2)$, dann ist ihre relativistische Summe in erster Näherung durch $v = c(1 - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2/2)$ gegeben (der relativistische Reduktionsfaktor beträgt dann nahezu $1/2$).

Man kann also durch relativistische Addition von Geschwindigkeiten, die $\leq c$ sind, die Geschwindigkeit c nicht überschreiten.

Dass c den Charakter einer Grenzgeschwindigkeit materieller Systeme hat, zeigt sich auch am für die Relativitätstheorie charakteristischen Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, der für Geschwindigkeiten, die die Bedingung $v < c$ verletzen, sinnlos wird.

Schliesst die Gültigkeit der Relativitätstheorie die Existenz von Objekten aus, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen (Tachyonen)? Nein. Die Bewegungsgesetze der Relativitätstheorie zeigen lediglich, dass man unendlich viel Energie benötigen würde, um ein ruhendes Objekt auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen. Dass dagegen in einer geeigneten Kollision ein Tachyon erzeugt werden könnte, ist nicht à priori auszuschliessen. Tachyonen würden allerdings sehr eigenartige Eigenschaften zweitigen; beispielsweise würden sie sich umso schneller bewegen, je mehr Energie ihnen entzogen würde. Im Jahr 2011 hat das OPERA Experiment (an welchem die Universität Bern beteiligt war) eine Messung veröffentlicht, wonach sich müonische Neutrinos etwas schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (siehe <http://xxx.lanl.gov/abs/1109.4897>). Dies hat sich aber als unrichtig erwiesen!

6 Energie und Impuls in der Relativitätstheorie

6.1 Neutrale π -Mesonen

Da π^0 -Mesonen in zwei Photonen zerfallen, kann ihre Energie auf Grund der folgenden zwei Voraussetzungen berechnet werden:

- (1) Die Energie ist eine erhaltene Grösse
- (2) Ein Photon der Frequenz ν besitzt die Energie $E = h\nu$.

Zerfall des π -Mesons in Ruhe



Offensichtlich ist dem ruhenden π -Meson eine Energie E_0 zuzuordnen, die nach seinem Zerfall als Energie von γ -Quanten erscheint:

Energiesatz: $E_0 = 2 h\nu_0$



Dopplereffekt:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \nu_0 \quad ; \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu_0$$

Der Energiesatz verlangt, dass die Energie E des fliegenden π -Mesons mit der Energie der beiden Photonen übereinstimmt:

$$\begin{aligned} E &= h\nu_1 + h\nu_2 \\ &= h\nu_0 \left\{ \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} + \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \right\} = \frac{2 h\nu_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Die Energie eines mit der Geschwindigkeit v bewegten π -Mesons ist somit um den Faktor $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ grösser als seine Ruheenergie:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.1)$$

Die Differenz zwischen der Energie des bewegten Teilchens und seiner Energie bei der Geschwindigkeit $v = 0$ ist nichts anderes als die *kinetische Energie* T :

$$T = E - E_0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\} E_0. \quad (6.2)$$

Für $v \ll c$ kann man die kinetische Energie entwickeln nach Potenzen von v^2/c^2 . Führe dazu die Hilfsgrösse $x = v^2/c^2$ ein:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} \quad \text{für kleine } x? \rightarrow \text{Taylor um } x = 0$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots \quad \text{allg.}$$

$$\text{Speziell: } f(x) = (1-x)^{-1/2}; \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}; \quad f''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-5/2}$$

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = \frac{1}{2}; \quad f''(0) = \frac{3}{4}$$

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3)$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + O\left(\frac{v^6}{c^6}\right)$$

und damit

$$T = \left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots\right) \cdot E_0 = \frac{1}{2}\frac{E_0}{c^2}v^2 + \dots$$

Wir fordern, dass dieser Ausdruck für kleine Geschwindigkeiten ($v \ll c$) in den klassischen Ausdruck übergeht:

$$T = \frac{m}{2}v^2 \quad (v \ll c).$$

Das klappt genau dann, wenn wir die Ruheenergie E_0 setzen gemäss

$$E_0 = mc^2. \quad (6.3)$$

Für die Energie eines bewegten π -Mesons ergibt sich damit der Ausdruck

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (6.4)$$

der für kleine Geschwindigkeiten durch

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots$$

angenähert wird. (Die Energie ist etwas grösser als nach der klassischen Mechanik; für $v = c$ wird E unendlich gross, statt dem Wert $mc^2 + \frac{1}{2}mc^2$ zuzustreben).

6.2 Masse und Energie

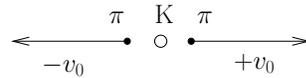
Da der für neutrale π -Mesonen gefundene Ausdruck für die Energie

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.5)$$

abgesehen von der Naturkonstanten c nur von der Masse m des Teilchens und seiner Geschwindigkeit abhängt, liegt es nahe, zu vermuten, dass derselbe Ausdruck für beliebige Objekte der Masse m und der Geschwindigkeit v gilt.

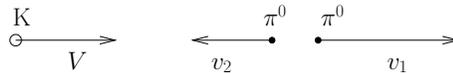
Kontrolle: Ein K-Meson zerfällt in zwei neutrale π -Mesonen.

Zerfall in Ruhe:



$$E_0 = 2 \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Zerfall im Flug:



Die Energie des fliegenden K muss wieder gleich der Summe der Energien der beiden π -Mesonen sein.

$$E = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}.$$

Wir haben die Geschwindigkeit v_1 in Kapitel 5.5 aus dem Dopplereffekt berechnet:

$$v_1 = \frac{V + v_0}{1 + \frac{Vv_0}{c^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{1 + \frac{v_0 V}{c^2}}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Analog gilt für das zweite π -Meson ($v_0 \rightarrow -v_0$).

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{1 - \frac{v_0 V}{c^2}}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Resultat:

$$E = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}} \left\{ 1 + \frac{v_0 V}{c^2} + 1 - \frac{v_0 V}{c^2} \right\}$$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Damit die kinetische Energie des K für kleine Geschwindigkeiten in den klassischen Ausdruck übergeht, müssen wir wieder setzen: $E_0 = m_K c^2$. Es folgt dann also, dass die Relation (6.5) auch für K -Mesonen gilt.

Betrachte nochmals die Reaktion $K \rightarrow \pi + \pi$. K sei in Ruhe. Berechne die Geschwindigkeit v_0 der π -Mesonen.

$$m_K c^2 = 2 \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \quad \text{Energieerhaltung}$$

$$1 - \frac{v_0^2}{c^2} = 4 \frac{m_\pi^2}{m_K^2}$$

$$v_0 = c \sqrt{1 - 4 \frac{m_\pi^2}{m_K^2}}.$$

v_0 wird also durch die Masse von K und π festgelegt.

Numerisch: $m_K c^2 = 497.7 \text{ MeV}$, $m_\pi c^2 = 135.0 \text{ MeV}$; $v_0 = 0.84 c$.

$$\begin{aligned} 1 \text{ keV} &= 10^3 \text{ eV} && \text{Kilo} \\ 1 \text{ MeV} &= 10^6 \text{ eV} && \text{Mega} \\ 1 \text{ GeV} &= 10^9 \text{ eV} && \text{Giga} \\ 1 \text{ TeV} &= 10^{12} \text{ eV} && \text{Tera} \end{aligned}$$

(6.6)

1 eV: Kinetische Energie, die ein Elektron gewinnt, wenn es eine Potentialdifferenz von 1 Volt durchläuft.

Slang: Häufig sagt man, die Ruhemasse oder die Masse des π^0 -Mesons sei 135.0 MeV. Man meint dabei natürlich, dass $m_\pi c^2 = 135.0 \text{ MeV}$.

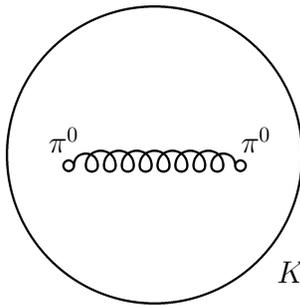
Wichtig: Die Masse bleibt beim Zerfall nicht erhalten:

$$m_K > m_\pi + m_\pi$$

Ein Teil der Ruheenergie des K-Mesons $m_K c^2$ schlägt sich nicht als Ruheenergie der π -Mesonen nieder, sondern in der Form kinetischer Energie:

$$m_K c^2 = 2 m_\pi c^2 + T.$$

Im klassischen Bild denkt man sich ein K-Meson zusammengesetzt aus zwei π -Mesonen. In der Energiebilanz wird die kinetische Energie der Zerfallprodukte durch die vor dem Zerfall in der Feder steckende potentielle Energie geliefert:



$$E_{\text{pot}} = 2 \frac{m_\pi}{2} v_0^2 \quad \text{klassischer Energiesatz}$$

K Um die beiden Bilder vergleichen zu können, ist zuerst die kinetische Energie der π -Mesonen genauer zu buchen:

$$E_{\text{pot}} = 2 m_\pi c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} - 1 \right\} \quad \text{resp.} \quad E_{\text{pot}} + 2 m_\pi c^2 = \frac{2 m_\pi c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Dies stimmt mit der relativistischen Energiebilanz überein, wenn man $(E_{\text{pot}} + 2 m_\pi c^2)$ gleich $m_K c^2$ setzt, resp. wenn man die Masse des K-Mesons mit

$$m_K = 2 m_\pi + \frac{E_{\text{pot}}}{c^2}$$

identifiziert.

Moral: In der relativistischen Mechanik führt die Masse kein Eigenleben, befolgt keinen Erhaltungssatz. Stattdessen schlägt sich die potentielle Energie der Bestandteile direkt in der Masse des zusammengesetzten Systems nieder.

Umgekehrter Prozess: Ein ruhendes Proton fängt ein ruhendes Elektron ein und bildet unter Emission eines Photons ein H-Atom

$$m_p c^2 + m_e c^2 = E_H + E_\gamma.$$

In diesem Fall ist offensichtlich die Energie E_H des zusammengesetzten Systems kleiner als die Summe der Ruheenergien seiner Bestandteile:

$$m_H c^2 < \frac{m_H c^2}{\sqrt{1 - v_H^2/c^2}} = E_H < m_p c^2 + m_e c^2.$$

Der Massendefekt kann wieder wie oben interpretiert werden:

$$m_H = m_p + m_e + \frac{E_B}{c^2}.$$

Im Unterschied zum K-Meson ist die Bindungsenergie des H-Atoms jedoch negativ ($E_B = -13.6 \text{ eV}$). Dies garantiert, dass ein H-Atom nicht spontan in seine Bestandteile zerfallen kann. (Damit ein Zerfall ohne Energiezufuhr möglich wäre, müsste $m_H > m_p + m_e$ gelten.)

6.3 Impuls

In diesem Abschnitt soll die Beziehung zwischen dem Impuls eines Teilchens der Masse m und seiner Geschwindigkeit v

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

plausibel gemacht werden.

Kraft, Energie, Impuls

Betrachte vorerst nur eine räumliche Dimension, d.h., Bewegung längs der x -Achse. Eine Kraft in x -Richtung wirke aufs Teilchen. Diese bewirkt eine Änderung der Position x , der Geschw. v , der Energie E und des Impulses p .

x	$x + dx$
v	$v + dv$
E	$E + dE$
p	$p + dp$

Klassische Mechanik: Die Arbeit, die die Kraft F [welche längs dem kleinen Wegstück dx als konstant betrachtet werden kann] am Teilchen verrichtet, schlägt sich als Änderung der kinetischen Energie nieder:

$$dE_{\text{kin}} = F dx.$$

Wir wollen diese Gl. aufrecht erhalten in der Relativitätstheorie. Da $E = E_{\text{kin}} + mc^2$ gilt somit für die Änderung der relativistischen Gesamtenergie E

$$dE = F dx. \tag{6.7}$$

Wir wollen den Impuls p so einführen, dass die zeitliche Änderung des Impulses wie in der klassischen Mechanik durch die momentane Kraft bestimmt ist, d.h.,

$$\frac{dp}{dt} = F. \quad (6.8)$$

Ferner soll der Impuls eines ruhenden Teilchens Null sein.

Aus (6.7) und (6.8) folgt

$$\begin{aligned} dE &= F dx = \frac{dp}{dt} dx = dp \frac{dx}{dt} = dp v \\ dE &= dp v \quad | \cdot \frac{1}{dv} \\ \frac{dE}{dv} &= \frac{dp}{dv} v \\ \rightarrow \frac{dp}{dv} &= \frac{1}{v} \frac{dE}{dv} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Wir kennen die Energie E als Funktion von v : $E(v) = m c^2 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Somit ist die rechte Seite von Gl. (6.9) bekannt:

$$\frac{dp}{dv} = \frac{1}{v} \frac{m c^2 (-1/2)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{(-2v)}{c^2} = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}. \quad (6.10)$$

Diese Beziehung lässt sich integrieren (Kontrolle: ableiten).

$$p(v) = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \text{const}.$$

Die Forderung $p(0) = 0$ bedeutet, dass $\text{const}=0$, somit

$$p(v) = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.11)$$

Zusammengefasst: Aus dem schon bekannten Ausdruck für die Energie

$$E(v) = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

konnten wir, unter der Forderung dass die klassischen Gl.

$$dE = F dx \quad \text{und} \quad F = \frac{dp}{dt}$$

in der Relativitätstheorie gültig bleiben sollen, eindeutig einen passenden Ausdruck für den Impuls herleiten:

$$p(v) = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{Ende Zusammenfassung})$$

Zur Kraft: Wir können aus der momentanen Änderung des Impulses die momentan wirkende Kraft ablesen:

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

Falls die Kraftfunktion gegeben ist, stellt diese Gl. die Bewegungsgleichung dar.

3–dim. Verallgemeinerung: Der Impuls \vec{p} ist gegeben durch

$$\vec{p}(\vec{v}) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (v = |\vec{v}|). \quad (6.12)$$

Auch im 3–dim. Fall lesen wir die gerade wirkende Kraft an der Impulsänderung ab

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Bei bekannter Kraftfunktion ist dies die Bewegungsgleichung. Sie lautet formal gleich wie die Newton'sche Bewegungsgleichung – allerdings mit dem gewichtigen Unterschied, dass der Impuls \vec{p} nicht mehr gleich $m\vec{v}$ ist.

Sätze und Beispiele dazu

- Satz:

$$dE = d\vec{x} \cdot \vec{F} \quad \text{oder} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{F}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 (1 - v^2/c^2)^{-3/2} \frac{\dot{v}v}{c^2} \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{F} &= \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m \frac{\dot{v}v}{c^2} (1 - v^2/c^2)^{-3/2}. \end{aligned}$$

- (3 dim.) Falls die Kraft nur vom Ort abhängt und falls sie ein Potential besitzt

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{x}),$$

so gilt die Energieerhaltung in der Form

$$E + V = mc^2 + T + V = \text{konst.},$$

wobei $E = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ nach wie vor die Ruheenergie und die kinetische Energie T enthält. Beweis als Übung.

- Beachte: Gelegentlich wird die sog. bewegte Masse $m(v) \doteq \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ eingeführt. Wir werden dieses Konzept nie brauchen, weil es leicht zu Fehlern verleitet: Zum Beispiel ist man geneigt zu schreiben

$$\vec{F} = m(v) \ddot{\vec{x}} \quad \text{falsch!!}$$

Dies ist aber falsch. Richtig ist

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} \\ \vec{F} &= \frac{m\ddot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} + m\dot{\vec{x}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} \\ \vec{F} &= m(v) \ddot{\vec{x}} + m\dot{\vec{x}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

- Als Anwendung der relativistischen Bewegungsgleichung betrachten wir die Beschleunigung eines Massenpunktes längs einer Geraden durch eine **konstante Kraft** F (Realisierung: Elektron im homogenen elektrischen Feld). Sei $x(0) = 0$, $v(0) = \dot{x}(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= F \quad | \int dt; \quad \text{einfach, weil } F = \text{const.} \\ p &= Ft + c \quad \text{Int.konst. } c=0, \text{ weil } \dot{x}(0) = 0 \\ \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} &= Ft \longrightarrow v(t) = \frac{Ft}{[m^2 + (Ft/c)^2]^{1/2}} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die Beziehung zwischen Ort und Zeit ergibt sich aus der Integration von $v(t)$ über die Zeit. (Ausarbeitung, Diskussion, Grafiken als Übung).

6.4 Massenschale

Masse und Geschwindigkeit legen Energie und Impuls eines Massenpunktes fest:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.15)$$

Umgekehrt sind durch E und \vec{p} auch m und \vec{v} bestimmt [siehe (6.16) und (6.17)]. Betrachte dazu zuerst die Kombination $E^2 - c^2 \vec{p}^2$:

$$E^2 - c^2 \vec{p}^2 = \frac{m^2 c^4 - c^2 m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m^2 c^4 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} = m^2 c^4.$$

Es gilt also

$$m^2 c^4 = E^2 - \vec{p}^2 c^2. \quad (6.16)$$

Betrachte jetzt \vec{p}/E :

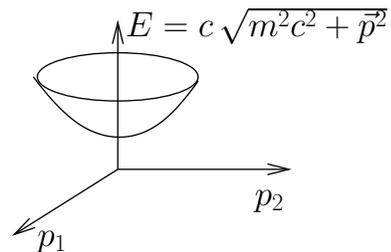
$$\frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{v}}{c^2} \longrightarrow \vec{v} = \frac{c^2}{E} \vec{p}. \quad (6.17)$$

Wir lösen (6.16) nach E und erhalten

$$E = c \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} \quad (6.18)$$

Bei *gegebener Masse* legt der Impuls also die Energie fest.

Im vierdimensionalen Raum der Variablen (E, p_1, p_2, p_3) liegen die möglichen Bewegungszustände auf einer der Schalen eines Hyperboloids (“Massenschale”).



Hinweis: Betrachte ein abgeschlossenes System.

$$\sum_k E_k = E \quad : \text{ Gesamtenergie des Systems}$$

$$\sum_k \vec{p}_k = \vec{p} \quad : \text{ Gesamtimpuls des Systems}$$

Beachte: E enthält die Summe der Energien aller Bestandteile (Teilchen, Felder); \vec{p} analog.

Definiere mithilfe von (6.16) die **Gesamtmasse** m des Systems

$$m = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - c^2 \vec{p}^2}. \quad (6.19)$$

Definiere mithilfe von (6.17) die **Gesamtgeschwindigkeit** v des Systems

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E} \vec{p}. \quad (6.20)$$

Falls $\vec{p} = 0$: $\vec{v} = 0$; $m = E/c^2$.

E , \vec{p} und \vec{v} hängen vom Bezugssystem ab.

Hingegen: Wir nehmen hier ohne Beweis vorweg, dass die Gesamtmasse m *unabhängig* ist vom Bezugssystem.

Sprechweise: Die Gesamtmasse m eines Systems ist eine *lorentzinvariante Grösse*.

6.4.1 Nichtrelativistische Näherungen

Der nicht-relativistische Bereich der Teilchengeschwindigkeit ist durch

$$v \ll c \quad \text{oder} \quad \frac{v}{c} \ll 1$$

charakterisiert. Unter dieser Voraussetzung gelten die klassischen Näherungen für den Impuls und die kinetische Energie

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx mv$$
$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 \approx \frac{m}{2}v^2.$$

Beachte: Masselose Teilchen fliegen gemäss dem nächsten Abschnitt immer mit Lichtgeschwindigkeit c . Es gibt demzufolge keine nicht-relativistischen Näherungen für Teilchen der Masse 0.

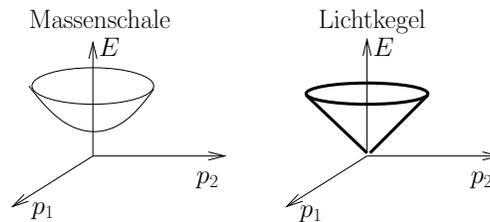
6.5 Teilchen der Masse 0: Photonen, Neutrinos

Die Photonen (Quanten des elektromagnetischen Feldes) gelten als Teilchen der Masse 0: als experimentelle Obergrenze wird die Grössenordnung von 10^{-50} kg angegeben. Seit kurzem weiss man, dass die verschiedenen Neutrinos und Anti-neutrinos ($\nu_e, \bar{\nu}_e; \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu; \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$) eine von Null verschiedene Masse haben. Da ihre Massen aber viel kleiner sind als die Masse der entsprechenden geladenen Leptonen ($e^-, e^+; \mu^-, \mu^+; \tau^-, \tau^+$), ist es in vielen Anwendungen eine ausgezeichnete Approximation, die Neutrinomassen zu vernachlässigen.

Im Grenzfall $m \rightarrow 0$ wird die Relation, die E mit \vec{p} verknüpft besonders einfach:

$$E = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2} \xrightarrow{m \rightarrow 0} E = c|\vec{p}|$$

In anderen Worten: Im Grenzfall $m \rightarrow 0$ entartet die Massenschale zum Lichtkegel.



Wichtige Aussage: Masselose Teilchen bewegen sich notwendigerweise mit Lichtgeschwindigkeit

Um dies einzusehen, starten wir mit Gl. (6.17):

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E} \vec{p} \longrightarrow |\vec{v}| = \frac{c^2}{E} |\vec{p}|.$$

Für $m \rightarrow 0$ wird $E = c|\vec{p}|$ und somit

$$|\vec{v}| = \frac{c^2}{E} |\vec{p}| = \frac{c^2 |\vec{p}|}{c |\vec{p}|} = c \quad \square$$

Die Energie eines Photons hat irgend einen Wert im Spektrum $0 < E = h\nu$, je nach der Frequenz $0 < \nu$ des Lichtes.

Die Grundbeziehungen für das Photon lauten also

$$m_\gamma = 0, \quad |\vec{v}| = c, \quad E = h\nu, \quad |\vec{p}| = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Frage: Kann man auch direkt aus Gl. (6.15) sehen, dass $|\vec{v}| \rightarrow c$ im Limes $m \rightarrow 0$?

Antwort: Ja. Betrachte $E = m c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Falls m gegen Null geht und man einen endlichen, von Null verschiedenen Wert der Energie haben will (gemäss $E = h\nu$), muss notwendigerweise $v \rightarrow c$ gehen.

6.6 Zweikörperzerfälle

Als Anwendung der relativistischen Energie und Impulserhaltung diskutieren wir Zerfälle vom Typ $A \rightarrow B + C$. Beispiele sind

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu && \text{Zerfall eines geladenen } \pi\text{-Mesons} \\ H^* &\rightarrow H + \gamma && \text{Zerfall eines angeregten H-Atoms in den Grundzustand} \\ \Lambda &\rightarrow p + \pi^- && \text{Zerfall des Baryons } \Lambda \end{aligned}$$

Beachte: Mit unseren Mitteln können wir nicht ausrechnen, wie schnell sich diese Reaktionen abspielen (\leftrightarrow Lebensdauer der Anfangszustände). Dazu bräuchte man die Methoden der Quantenfeldtheorie.

Aber: Wir können *kinematische Fragen* beantworten, z.B. was sind die Energien und Impulse der Endprodukte.

Wir diskutieren nur den Zerfall in Ruhe.

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B + C \\ M &\quad m_1 \quad m_2 \\ M c^2 &= E_1 + E_2 && \text{Energiesatz} \\ 0 &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 && \text{Impulssatz} \end{aligned}$$

Bemerkung: Manchmal ist es ungeschickt, sofort mit den Formeln

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

zu starten (wegen der Wurzeln).

Wir wollen zuerst Energie und Impuls des *ersten* Teilchens ausrechnen. Dazu starten wir mit der Massenschalenrelation des *zweiten* Teilchens:

$$E_2^2 - c^2 \vec{p}_2^2 = m_2^2 c^4.$$

Drücke darin E_2, \vec{p}_2 mit E_1, \vec{p}_1 aus (unter Verwendung von Energie- und Impulserhaltung):

$$\begin{aligned} (Mc^2 - E_1)^2 - \vec{p}_1^2 c^2 &= m_2^2 c^4 \\ M^2 c^4 - 2E_1 M c^2 + \underbrace{E_1^2 - \vec{p}_1^2 c^2}_{m_1^2 c^4} &= m_2^2 c^4 \\ (M^2 + m_1^2 - m_2^2) c^4 &= 2 M c^2 E_1 \\ E_1 &= \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Analog erhält man

$$E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} c^2. \quad (6.22)$$

Beachte: E_1 und E_2 hängen nur von den Massen ab.

Der Betrag des Impulses $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \vec{p}_1^2 &= \frac{E_1^2 - m_1^2 c^4}{c^2} \quad \text{und Einsetzen von } E_1 \\ \vec{p}_1^2 &= \frac{M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2}{4M^2} c^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

\vec{p}_1^2 ist symmetrisch in m_1, m_2 . Wieso?

Die Beträge der Geschwindigkeiten sind gegeben durch

$$|\vec{v}_1| = \frac{|\vec{p}_1|}{E_1} c^2; \quad |\vec{v}_2| = \frac{|\vec{p}_2|}{E_2} c^2. \quad (6.24)$$

Anwendungen:

a) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$: $M = m_\pi, m_1 = m_\mu, m_2 = 0$.

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2 m_\pi} c^2; \quad |\vec{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2 m_\pi} c; \quad |\vec{v}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c.$$

Numerisch: $m_\pi c^2 = 139.6$ MeV, $m_\mu c^2 = 105.6$ MeV, $E_\mu = 110$ MeV, $E_\nu = 29.6$ MeV, $|\vec{v}_\mu| = 0.275 c$.

Frage: Was ist die kinetische Energie T_μ des Müions?

b) $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$: $M = m_\Lambda$, $m_1 = m_p$, $m_2 = m_{\pi^-}$

Dies ist eine konkrete Anwendung der allgemeinen Formeln ((6.21)–(6.24)) für $1 \rightarrow 2$ Übergänge.

Die Energie des beim Zerfall in Ruhe emittierten π^- -Mesons beträgt

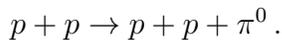
$$E_{\pi^-} = \frac{m_\Lambda^2 + m_{\pi^-}^2 - m_p^2}{2m_\Lambda} c^2$$

Numerisch: $m_\Lambda c^2 = 1115.6$ MeV, $m_p c^2 = 938.3$ MeV, $m_{\pi^-} c^2 = 139.6$ MeV, $E_{\pi^-} = 171.9$ MeV (Ruheenergie 139.6 MeV, kinetische Energie 32.3 MeV).

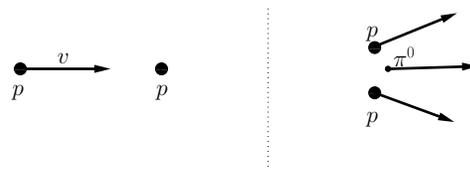
Übung: Bestimme die Geschwindigkeiten der Zerfallsprodukte.

6.7 Teilchenerzeugung

An einem Beschleuniger sollen π^0 -Mesonen erzeugt werden, indem beschleunigte Protonen auf ruhende Protonen geschossen werden. Die einfachste Reaktion von diesem Typ, welche mit allen Erhaltungssätzen aus der Elementarteilchenphysik verträglich ist, lautet



Für die Sprechweise nennen wir das beschleunigte Proton das Projektil und das ruhende Proton das Targetproton.



Frage: Welche kinetische Energie muss das Projektil mindestens haben, damit die Reaktion zu laufen beginnt?

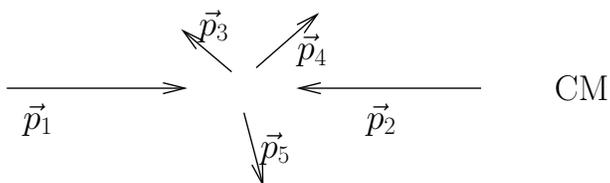
Die kinetische Energie des Projektils muss sicher mindestens gleich der Ruheenergie des zu erzeugenden π^0 -Mesons sein. Genau diese Energie müsste das Projektil haben, wenn alle Endprodukte in Ruhe wären.

Es ist aber unmöglich, dass alle Endprodukte im Labor in Ruhe sind wegen der Impulserhaltung.

Es genügt also nicht, nur die Ruheenergie des π^0 zur Verfügung zu stellen. Man muss zusätzlich noch kinetische Energie für die Endprodukte bereitstellen, so dass auch der Impulssatz erfüllt werden kann.

Um die Einschränkung, die der Impulssatz der Reaktion auferlegt, in einfache Form zu bringen, diskutieren wir die Reaktion zuerst im *Schwerpunktsystem*, engl. *center of mass system (CM)*, das durch die Forderung gekennzeichnet ist, dass die Impulse von Projektil und Targetproton gerade entgegengesetzt gleich gross sind, d.h.,

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \quad \text{im Schwerpunktsystem .}$$



In diesem System verlangt die Impulserhaltung, dass die Summe aller Impulse der Teilchen im Endzustand ebenfalls verschwindet, d.h.,

$$\vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{p}_5 = 0 \quad \text{im Schwerpunktsystem .}$$

Die Reaktion kann dann ablaufen, wenn die Energie im Schwerpunktsystem gerade ausreicht, den Teilchen die nötige Ruheenergie zu geben, keine zusätzliche kinetische Energie. (Diese Konfiguration ist im Schwerpunktsystem mit der Impulserhaltung verträglich, im Laborsystem ist sie dies nicht). Also gilt

$$E_1 + E_2 \geq m_3c^2 + m_4c^2 + m_5c^2 \quad \text{Schwerpunktsystem} \quad (6.25)$$

Wir können eine entsprechende Bedingung gewinnen für die Gesamtmasse M des Systems, welche definiert ist gemäss (siehe Abschnitt 6.4)

$$M = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - \vec{p}^2 c^2},$$

E : Gesamtenergie des Systems

\vec{p} : Gesamtimpuls des Systems

Der Wert von M ist, im Gegensatz zu E, \vec{p} unabhängig vom System (M ist eine Lorentzinvariante Grösse). Wir können also M z.B. im Schwerpunktsystem (wo $\vec{p} = 0$) auswerten. Dort gilt

$$M = \frac{1}{c^2} E = \frac{1}{c^2} (E_1 + E_2) \quad (E_1, E_2 \text{ im Schwerpunktsystem}) \quad (6.26)$$

Gemäss Gl. (6.25) läuft die Reaktion, wenn im Schwerpunktsystem $E_1 + E_2 \geq (m_3 + m_4 + m_5) c^2$. Daraus folgt mit Gl. (6.26), dass die Reaktion abläuft, wenn

$$M \geq m_3 + m_4 + m_5. \quad (6.27)$$

Also: Die Reaktion beginnt abzulaufen, wenn die Gesamtmasse M gerade $m_3 + m_4 + m_5$ wird.

Springender Punkt: Weil M eine systemunabhängige Grösse ist, gilt (6.27) in jedem System, insb. auch im Laborsystem.

Um die am Anfang des Abschnitt gestellte Frage zu beantworten, drücken wir die Gesamtmasse M mit Laborgrössen aus [Die Gesamtenergie im Labor ist $E = E_p + m_p c^2$ und der Gesamtimpuls ist $\vec{p} = \vec{p}_p$]:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - \vec{p}^2 c^2} \quad \text{resp.} \quad E^2 - \vec{p}^2 c^2 = M^2 c^4 \\ (E_p + m_p c^2)^2 - \vec{p}_p^2 c^2 &= M^2 c^4 \\ \underbrace{E_p^2 - \vec{p}_p^2 c^2}_{m_p^2 c^4} + 2 E_p m_p c^2 + m_p^2 c^4 &= M^2 c^4 \\ E_p &= \frac{1}{2 m_p} (M^2 - 2 m_p^2) c^2. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Resultat:

- Damit das System (Projektile, Target) im Labor eine vorgegebene Gesamtmasse M hat, muss die Energie E_p des Projektils gemäss Formel (6.28) gewählt werden.
- Damit die obige Reaktion zu laufen beginnt, muss $M \geq m_3 + m_4 + m_5$ sein.

In unserer Anwendung ist $m_3 = m_4 = m_p$ und $m_5 = m_{\pi^0}$, also muss $M \geq 2 m_p + m_{\pi^0}$ sein und somit

$$E_p \geq \frac{1}{2 m_p} \left[(2 m_p + m_{\pi^0})^2 - 2 m_p^2 \right] c^2$$

$$E_p \geq m_p c^2 + 2 m_{\pi^0} c^2 + \frac{m_{\pi^0}^2}{2 m_p} c^2 .$$

Die kinetische Energie T_p der Projektiles muss also

$$T_p \geq 2 m_{\pi^0} c^2 + \frac{m_{\pi^0}^2}{2 m_p} c^2 .$$

erfüllen, damit die Reaktion abläuft. Sie muss also mehr als das Doppelte der Ruheenergie des zu erzeugenden π^0 -Mesons betragen.

7 Die Lorentztransformation

Die Postulate der Relativitätstheorie erlauben es, den Zusammenhang zwischen den Koordinaten zweier Inertialsysteme (IS und IS') durch 10 Parameter auszudrücken, die die relative Lage und Geschwindigkeit der beiden Inertialsysteme charakterisieren. Die Koordinaten von ein- und demselben Ereignis sind in der Regel in den zwei Systemen verschieden:

$$\text{IS:}(\vec{x}, t); \quad \text{IS':}(\vec{x}', t');$$

Gesucht ist die Abbildung

$$(\vec{x}', t') = F(\vec{x}, t), \quad (7.1)$$

die wir in diesem Kapitel herleiten wollen.

7.1 Linearität der Transformation zwischen Inertialsystemen

Das Postulat (5) (vgl. Kap. 5) verlangt, dass jede geradlinig gleichförmige Bewegung

$$\vec{x} = \vec{v}t + \vec{a}$$

auch im gestrichenen IS als geradlinig gleichförmig erscheint:

$$\vec{x}' = \vec{v}'t' + \vec{a}'$$

Behauptung: Aus dieser Eigenschaft folgt, dass die Abbildung (7.1) linear ist, d.h. (\mathbf{A} ist eine (3×3) -Matrix)

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \mathbf{A}\vec{x} + \vec{B}t + \vec{C}, \\ t' &= \vec{D} \cdot \vec{x} + Et + F, \end{aligned} \quad (7.2)$$

oder in Komponenten geschrieben

$$\begin{aligned} x'_k &= \sum_{i=1}^3 A_{ki} x_i + B_k t + C_k, \\ t' &= \sum_{i=1}^3 D_i x_i + Et + F. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Beweis: a.) Die Weltlinie, die zu einer beliebigen geradlinig gleichförmigen Bewegung gehört, stellt im vierdimensionalen Raum der Ereignisse (\vec{x}, t) eine Gerade dar. Umgekehrt stellt jede Gerade in diesem Raum eine geradlinig gleichförmige Bewegung dar. Das Postulat verlangt somit, dass die Abbildung Geraden in Geraden überführt. Satz aus der Geometrie: Eine stetige, umkehrbar eindeutige Abbildung führt genau dann jede Gerade in eine Gerade über, wenn sie linear ist. (Genau genommen darf man hier nur voraussetzen, dass alle Geraden mit der Steigung $|\vec{v}| < c$ wieder in solche Geraden übergeführt werden, da nur diese Klasse von Weltlinien der kräftefreien Bewegung eines Massenpunkts entspricht. Der Satz gilt aber auch, wenn nur Geraden mit beschränkter Steigung zulässig sind).

b.) Eine intuitive Begründung der Behauptung ist im Anhang B.1 zu finden.

7.2 Lorentztransformation für Ereignisse auf der x -Achse

Wir diskutieren zuerst nur Ereignisse, die im ungestrichenen IS auf der ersten Achse stattfinden, d.h.,

$$y = z = 0.$$

Wir betrachten die Situation, wo die x -Achsen der beiden Systeme für alle Zeiten zusammenfallen, d.h., die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme liegt in Richtung der ersten Achse.

Die betrachteten Ereignisse liegen dann auch im gestrichenen System auf der ersten Achse, also

$$y = z = 0 \rightarrow y' = z' = 0.$$

Ereignisse auf der x -Achse sind durch die beiden Koordinaten (x, t) bzw. (x', t') vollständig charakterisiert. In diesem Spezialfall ist die lineare Transformation von der Form $(A_{11} = A, B_1 = B, C_1 = C, D_1 = D)$

$$x' = A x + B t + C$$

$$t' = D x + E t + F$$

Wir bestimmen nun die Transformationskoeffizienten A, B, C, D, E, F unter Verwendung der relativistischen Postulate:

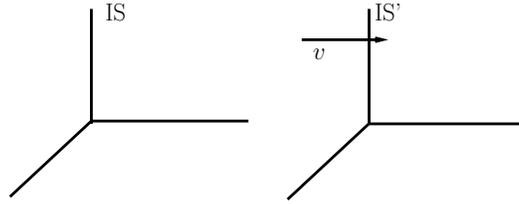
a) Die Transformation

$$x' \rightarrow x + C, \quad t' \rightarrow t + F$$

beinhaltet lediglich eine Verschiebung des Ursprungs des IS. Wir können daher ohne weiteres $C = F = 0$ setzen und haben dann die homogene Transformation

$$\begin{aligned} x' &= A x + B t \\ t' &= D x + E t. \end{aligned} \quad (7.4)$$

b) Wir bezeichnen die Geschwindigkeit, mit der sich der Ursprung des gestrichenen IS in bezug auf das ungestrichene System bewegt, mit v .



Der Ursprung des gestrichenen IS bewegt sich auf der Weltlinie $x' = 0$:

$$0 = x' = A x + B t \rightarrow x = -\frac{B}{A} t \rightarrow -\frac{B}{A} = v.$$

c) Im ungestrichenen IS bewege sich ein Lichtsignal nach rechts:

$$\begin{aligned} x = c t &\longrightarrow x' = A c t + B t = (A c + B) t \\ t' &= D c t + E t = (D c + E) t \\ \implies x' &= \frac{A c + B}{D c + E} t' \end{aligned} \quad (7.5)$$

Nach Postulat (4*) (universale Lichtgeschwindigkeit) muss sich das Lichtsignal im gestrichenen System ebenfalls mit Lichtgeschwindigkeit nach rechts bewegen:

$$\frac{A c + B}{D c + E} \stackrel{!}{=} c \longrightarrow A c + B = c(D c + E) \quad (i)$$

Analog folgt für ein nach links laufendes Signal ($c \rightarrow -c$):

$$-A c + B = -c(-D c + E) \longrightarrow -A c + B = c(D c - E) \quad (ii).$$

$$\begin{aligned} (i) + (ii) : \quad 2 B &= 2 D c^2 \longrightarrow D = \frac{B}{c^2} \\ (i) - (ii) : \quad 2 A c &= 2 c E \longrightarrow E = A. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Nach **b)** ist zudem $B = -Av$, somit gilt:

$$B = -Av; \quad E = A; \quad D = -\frac{Av}{c^2}.$$

Damit ist die Transformation bis auf den Koeffizienten A bestimmt:

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bt = A(x - vt) \\ t' &= Dx + Et = A\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

d) Der Wert des Koeffizienten A wird durch die Forderung, dass sich Lichtsignale in beiden IS mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, nicht festgelegt.

A hat mit dem Gangunterschied von Uhren zu tun.

Betrachte eine Uhr, die im Ursprung des ungestrichenen Systems ruht ($x = 0, \forall t$). Diese zeige gerade den Zeitwert t an.

Vom gestrichenen System aus betrachtet, befindet sie sich, wenn sie die Zeit t anzeigt, bei

$$x' = -Avt.$$

Eine dort ansässige Uhr (also fest mit dem gestrichenen System verbunden) zeigt gemäss Gl. (7.7) die Zeit t' an:

$$t' = At.$$

Vom gestrichenen System aus betrachtet, bewegt sich die Uhr, welche t anzeigt, mit Geschwindigkeit v . Wir wissen bereit, dass bewegte Uhren um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ langsamer laufen (siehe Kapitel 5):

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Somit gilt für A :

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.8)$$

Die **Lorentztransformation für Ereignisse auf der ersten Achse** lautet also (v : Relativgeschwindigkeit der Systeme):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.9)$$

Wir betrachten im folgenden eine

Andere Bestimmung von A:

- Im IS(\vec{x}, t) ruhe ein Massstab der Länge ℓ (Endpunkte bei $x = 0, x = \ell$).
- Mache im IS'(\vec{x}', t') eine Momentaufnahme des Stabes zur Zeit $t' = 0$. Was ist die Länge ℓ' des Stabes auf dieser Aufnahme?

$$x' = A(x - vt); \quad t' = A \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

$$t' = 0 : \quad t = \frac{vx}{c^2} \longrightarrow x' = A \left(x - \frac{v^2 x}{c^2} \right) = A \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x$$

Endpunkte des Stabes auf der Momentaufnahme im IS':

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad x' &= 0 \\ x = \ell : \quad x' &= A \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \ell \end{aligned}$$

Der Stab erscheint also mit der Länge $\ell' = A(1 - v^2/c^2)\ell$ im IS'.

- Im IS' ruhe ebenfalls ein Stab der Länge ℓ (Endpunkte $x' = 0, x' = \ell$). Momentaufnahme machen zur Zeit $t = 0$ im ungestrichenen IS:

$$x' = A(x - vt); \quad t' = A \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

$$t = 0 : \quad x' = Ax; \quad x = \frac{x'}{A}.$$

Endpunkte des Stabes auf der Momentaufnahme im IS:

$$\begin{aligned} x' = 0 : \quad x &= 0 \\ x' = \ell : \quad x &= \frac{\ell}{A}. \end{aligned}$$

Der Stab erscheint also mit der Länge $\ell'' = \frac{\ell}{A}$ im IS.

Das Relativitätsprinzip verlangt, dass $\ell' = \ell''$, d.h.,

$$A \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \ell = \frac{\ell}{A} \longrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Beachte: Diese Überlegungen zeigen, dass bewegte Massstäbe um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ verkürzt erscheinen:

$$\ell' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ell \quad \text{Lorentzkontraktion.}$$

Es ist vielleicht nützlich, wenn wir uns nochmals im Detail überlegen, wie man die Länge eines vorbeifliegenden Objektes zu messen hat.

Situation: Stab der Länge a ruhe im IS'. Länge des Stabes im IS?

Offenbar muss man die Orte x_2 und x_1 von Kopf und Ende des Stabes zum gleichen Zeitpunkt t feststellen – sonst kann $x_2 - x_1$ einen beliebigen Wert annehmen.

Nimm an, dass im IS an jedem Punkt eine Uhr sitzt (diese Uhren denken wir uns synchronisiert).

Wenn man sagt, zum Zeitpunkt t sei der Kopf bei x_2 und das Ende bei x_1 , meint man folgendes:

Die Uhr im Punkt x_2 (wo sich der Kopf gerade befindet), zeigt t an.

Die Uhr im Punkt x_1 (wo sich das Ende gerade befindet), zeigt t an.

Es sind also hier **zwei Uhren** des ungestrichenen IS im Spiel.

Wir gehen die Rechnung der Lorentzkontraktion nochmals durch (unter Verwendung von $A = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$).

$$\begin{array}{ccc} & x'_2 = x'_1 + a & \\ & \underbrace{\hspace{10em}} & \\ & \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ t & & t \end{array} & x \end{array}$$

Wenn der Stab der Länge a im IS' ruht, befinden sich seine Enden bei x'_1 und $x'_2 = x'_1 + a$. Aus der Formel (7.9) ergibt sich $x_2 - x_1$ leicht:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Subtraktion ergibt die Lorentzkontraktionsformel

$$\underbrace{x'_2 - x'_1}_a = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \longrightarrow x_2 - x_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2} a.$$

Übung: Verifiziere, dass zwei nacheinander ausgeführte Lorentztransformationen mit den Geschwindigkeiten v_1, v_2 insgesamt wieder eine Lorentztransformation ergeben. Wie gross ist die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Transformation?

Im folgenden Abschnitt 7.3 wird die Lorentztransformation (7.9) für Ereignisse auf der x -Achse diskutiert. Das Ziel ist es, den Gehalt und die Bedeutung der Lorentztransformationen zu illustrieren.

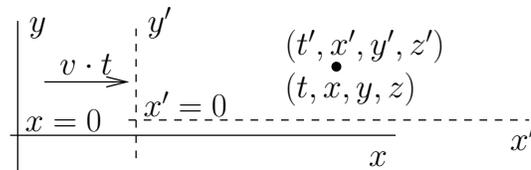
Dies sind aber Dinge, die jede(r) in aller Ruhe selbständig durchdenken muss. Da alles sehr ausführlich beschrieben ist in diesem Abschnitt, gehe ich in den Vorlesungstunden nicht darauf ein. Ich möchte Sie aber ermuntern, in den Übungen zu fragen, wenn Unklarheiten oder Probleme auftauchen.

7.3 Diskussion der Lorentztransformation

Ein *Ereignis* findet zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort statt. Sei (t, x, y, z) das Ereignis in der Beschreibung bezüglich eines Inertialsystems S und (t', x', y', z') dasselbe Ereignis in der Beschreibung bezüglich eines anderen Inertialsystems S' . Für zwei beliebige Inertialsysteme S', S nennt man die Beziehung

$$(t', x', y', z') \leftrightarrow (t, x, y, z) \quad (7.10)$$

die *allgemeine Lorentztransformation*. Nachfolgend diskutieren wir die *spezielle Lorentztransformation* in x -Richtung: die Achsen x und x' gleiten aufeinander, die Achsen y' und y sind parallel, ebenso z' und z .



Einzigster Parameter der Transformation ist die Relativgeschwindigkeit v der beiden Systeme; die Transformationsformeln lauten

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.11)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.12)$$

$$y' = y \quad (7.13)$$

$$z' = z \quad (7.14)$$

Für Ereignisse auf der x -Achse sind nur die beiden ersten Gleichungen zu diskutieren: $(x', t') \leftrightarrow (x, t)$.

In diesen Gleichungen kommen die wesentlichen Effekte in der Transformation von Raum und Zeit als Folge der Relativbewegung der beiden Systeme zum Ausdruck. Wir diskutieren nachfolgend diese Effekte in verschiedener Hinsicht, ohne hier noch einmal auf die Herleitung von (7.11)–(7.14) einzugehen (diese befindet sich im vorangehenden Abschnitt; sie beruht auf den Postulaten der Relativitätstheorie, insbesondere: (a) eine gleichförmige Bewegung bezüglich S ist auch bezüglich S' gleichförmig, (b) Relativitätsprinzip, insbesondere die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit).

Die Diskussion in diesem Abschnitt wird zeigen, dass die obige Transformation tatsächlich alle gewünschten Eigenschaften aufweist. Wir betrachten vorerst nur Ereignisse auf der x -Achse.

(a) Die Umkehrung von (7.11), (7.12) lautet

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.15)$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.16)$$

(b) Die Transformationen (7.11)–(7.14) sind *linear*. Aus einer gleichförmigen Bewegung $x = a + tw$ bezüglich S folgt eine gleichförmige Bewegung $x' = a' + t'w'$ bezüglich S' . (Eine kräftefreie Bewegung wird von jedem Inertialsystem aus als solche beurteilt).

(c) Die Transformationen sind *homogen*: $(t = 0, x = 0) \rightarrow (t' = 0, x' = 0)$. Dies beruht auf der Konvention, dass zum Zeitpunkt der Koinzidenz der Ursprünge $x = 0$ und $x' = 0$ die Uhren der beiden Systeme in diesem Punkt die Zeit Null anzeigen sollen.

(d) Das klassische Postulat der universellen Zeit, wonach immer und überall $t' = t$, ist nicht erfüllt. *Jedes Inertialsystem hat seine eigene Zeitmessung.*

(e) Bewegung des Ursprungs $x' = 0$ von S' in bezug auf S ? Aus (7.12) lesen wir ab: $x = vt$

$$\begin{array}{ccc} x' = 0 & & x' = 0 \\ \bullet & & \bullet \\ \hline x_1 = vt_1 & & x_2 = vt_2 \end{array} x$$

- (f) Analog für die Bewegung des Ursprungs $x = 0$ des Systems S in bezug auf S' : aus (7.16) folgt $x' = -vt'$.

$$\begin{array}{ccc} x'_2 = -vt'_2 & & x'_1 = -vt'_1 \\ \bullet & & \bullet \\ \hline x = 0 & & x = 0 \end{array} x'$$

Die Relativgeschwindigkeit von S und S' wird also (abgesehen vom Vorzeichen) von beiden Systemen aus gleich beurteilt – nach dem Relativitätsprinzip *muss* diese Symmetrie gelten. Sie drückt sich auch darin aus, dass

$$(x', t') = f(x, t, v) \quad (7.17)$$

$$(x, t) = f(x', t', -v). \quad (7.18)$$

- (g) Betrachte ein Photon, welches nach rechts fliegt. Die Bewegung in bezug auf S ist durch $x = ct$ gegeben. Wie transformiert sich diese Beziehung auf die Koordinaten von S' ? Wir ersetzen x und t nach (7.15), (7.16)

$$\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = c \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

und lösen nach x' auf:

$$x' = ct'.$$

Die Forderung des Relativitätsprinzips, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bezugssystem immer denselben Wert c habe, ist also für Photonen erfüllt, welche längs der x -Achse nach rechts fliegen.

- (h) Für ein Photon, welches längs der x -Achse nach links fliegt, ergibt sich genau dasselbe: $x = -ct \rightarrow x' = -ct'$. (Übung)
Hinweis: In der Herleitung der Formeln der Lorentztransformation ist die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit eine *Forderung*, welche für die Bestimmung der Koeffizienten in den linear angesetzten Beziehungen (7.10) benutzt wird.

- (i) Eine Uhr U' bewege sich in $x' = 0$ mit dem System S' ; t' bezeichnet ihre Zeitanzeige. Ihr Gang soll vom System S aus beurteilt werden. Diese Beurteilung findet so statt, dass man die Anzeige t' mit der Anzeige t der jeweils am gleichen Ort befindlichen und in S ruhenden Uhr vergleicht. An der Beurteilung von U' sind also mehrere Uhren in S beteiligt.

$$\begin{array}{ccc}
 x' = 0 & \text{dieselbe} & x' = 0 \\
 t'_1 & \text{---} \text{Uhr} \text{---} \Rightarrow & t'_2 \\
 \bullet & & \bullet \\
 \hline
 t_1 & & t_2 \\
 x_1 = vt_1 & & x_2 = vt_2
 \end{array} x$$

Aus $x' = 0$ folgt mit (7.15)

$$t_1 = t'_1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad t_2 = t'_2 / \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

und hieraus durch Subtraktion

$$t'_2 - t'_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2} (t_2 - t_1). \quad (7.19)$$

Vom Standpunkt des Systems S bedeutet dies: der Zeiger der bewegten Uhr U' rückt im Vergleich mit den Zeigerstellungen der ruhenden Uhren langsamer vor. *Bewegte Uhren laufen langsamer.* Ist dies eine Realität oder ein Fiktion? Dazu die folgenden Anmerkungen.

- Die Verlangsamung ist reell. Betrachte eine Uhr U' , welche sich gegenüber S von $x = 0$ aus der Geschwindigkeit v nach $x = x_1$ bewegt, wo man ihre Zeigerstellung auf ein Uhr U'' überträgt; diese bewege sich bezüglich S mit der Geschwindigkeit $-v$ in den Punkt $x = 0$ zurück. Auch U'' läuft gegenüber den Uhren von S langsamer (beachte, dass der Verlangsamungsfaktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ nicht vom Vorzeichen von v abhängt). Somit wird U'' bei der Rückkehr im Vergleich mit der in $x = 0$ bezüglich S ruhenden Uhr U anzeigen, dass auf den bewegten Uhren weniger Zeit als auf U verflossen ist.
- Der Gang einer realen Uhr (Quarz oder rein mechanisch) ist durch elektromagnetische Prozesse bestimmt. Die Maxwellgleichungen lauten bezüglich jedes Inertialsystems gleich (sie sind also mit dem Relativitätsprinzip verträglich – wir haben den Beweis hier nicht geführt). Somit verhalten sich reale Uhren genau so wie jene idealen Zeitmesser, welche in all unseren Überlegungen vorkommen, und zu deren Gang wir aufgrund des Relativitätsprinzips theoretische Aussagen gemacht haben.

- Eine herumbewegte Swatch wird nach ihrer Rückkehr tatsächlich weniger vorgerückt sein als ihr zurückgebliebenes Duplikat aus derselben Fabrikationsserie. (Solche Experimente sind durchgeführt worden: Transport einer Uhr um die Erde mit Verkehrsflugzeugen; allerdings muss die Auswertung berücksichtigen, dass das unterschiedliche Gravitationspotential auf Erdoberfläche und in der Flughöhe einen weiteren Einfluss der gleichen Größenordnung auf den Gang der Uhr hat; dies ist ein Effekt, welcher im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie zu besprechen ist.)

(j) Für die Uhr U , welche in $x = 0$ bezüglich S ruht, ergibt sich die analoge Aussage.

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{x'_2 = -vt'_2}{t'_2} & & \frac{x'_1 = -vt'_1}{t'_1} \\
 \bullet & & \bullet \\
 \hline
 x = 0 & \text{dieselbe} & x = 0 \\
 t_2 & \leftarrow \text{Uhr} & t_1
 \end{array} x$$

Aus (7.11) folgt für die Anzeige t von U

$$t_2 - t_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2} (t'_2 - t'_1). \quad (7.20)$$

An dieser Aussage sind eine einzige Uhr von S und mehrere Uhren von S' beteiligt. Dass sowohl S wie auch S' die Uhren des anderen Systems als langsamer laufend beobachten, stellt keinen Widerspruch dar.

(k) Zur Synchronisation der Uhren. Betrachte eine Momentaufnahme im System S : zum selben Zeitpunkt $t = 0$ werden in x_1 und x_2 die dort gerade vorbeifliegenden Uhren des Systems S' abgelesen.

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{x'_1}{t'_1} & & \frac{x'_2}{t'_2} \\
 | & & | \\
 \hline
 x_1 & & x_2 \\
 t & & t
 \end{array} x$$

Nach (7.11) gilt

$$t'_2 - t'_1 = -\frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Die Uhren von S' sind nicht gleich synchronisiert wie jene von S .

Kommentar:

- Die hier vorliegende Synchronisation (gemäss den Formeln der Lorentztransformation) ist notwendig, um das Relativitätsprinzip, insbesondere die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit, zu erfüllen. Umgekehrt erreicht man mit der Voraussetzung der invarianten Lichtgeschwindigkeit in der Praxis genau die richtige Synchronisation wie folgt: vom Mittelpunkt zwischen zwei Uhren aus, welche bezüglich eines Systems S' ruhen, sendet man gleichzeitig ein Lichtsignal zu beiden Uhren ab; wenn das Signal dort eintrifft, müssen beide Uhren dieselbe Zeit anzeigen. (Übung: man setze sich mit der Beurteilung dieses Synchronisationsvorganges vom Standpunkt des Beobachters S auseinander).
- Der Unterschied in der Synchronisation ist $\approx \frac{v}{c} \frac{x_2 - x_1}{c}$. Beispiel: $x_2 - x_1 = 10$ Lichtjahre, $v/c = 10^{-4}$. Der Unterschied in der Synchronisation der beiden Systeme beträgt etwa 8 Stunden.

- (l) Wie kann man die Länge eines vorbeifliegenden Objektes messen? Offenbar ist darauf zu achten, die Orte x_2, x_1 von Kopf und Ende zum gleichen Zeitpunkt t festzustellen – sonst kann $x_2 - x_1$ einen beliebigen Wert annehmen. (Einfach "hinschauen" ist zu wenig präzise: das Licht, welches vom Kopf und vom Ende in einem bestimmten Augenblick bei uns eintrifft, war i.a. unterschiedlich lange unterwegs, und hat also das Objekt zu verschiedenen Zeitpunkten verlassen.)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x'_1 & \text{-----} & x'_2 = x'_1 + a \\ | & & | \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ t & & t \end{array} \end{array} \quad x$$

Wenn der Massstab der Länge a in S' ruht, so befinden sich seine Enden an den Orten x'_1 und $x'_2 = x'_1 + a$. Mit (7.12)

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Subtraktion ergibt

$$x_2 - x_1 = a \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Der bewegte Massstab erscheint gegenüber seiner Ruhelänge a verkürzt.

- (m) Umgekehrt: ein Massstab der Ruhelänge a , welcher in S ruht, wird von S' aus beurteilt, und zwar müssen nun Kopf und Ende zu gleicher Zeit t' beobachtet werden.

$$\begin{array}{c}
 \frac{x'_1}{t'} \qquad \qquad \qquad \frac{x'_2}{t'} \\
 \hline
 | \qquad \qquad \qquad | \\
 x_1 \qquad \qquad \qquad x_2 = x_1 + a
 \end{array}
 \quad x'$$

Analog erhält man $x'_2 - x'_1 = a\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (Übung).

7.4 Lorentztransformation beliebiger Ereignisse

Bisher: nur Ereignisse betrachtet, die auf der x -Achse stattfinden.

Jetzt: Wir wollen die Transformationsformel $(\vec{x}', t') = F(\vec{x}, t)$ für beliebige Ereignisse herleiten.

Wir betrachten aber in diesem Kapitel nur den Fall, wo die ersten Achsen der beiden Inertialsysteme übereinstimmen und wo die (x', y') -Ebene des IS' auf der (x, y) -Ebene des IS mit Geschwindigkeit v gleiten soll.

Die gesuchte Abbildung

$$(\vec{x}', t') = F(\vec{x}, t)$$

soll folgende natürliche Eigenschaften aufweisen:

A. F bildet Ereignisse auf der x -Achse auf die x' -Achse ab gemäss (7.9):

$$y = z = 0 \rightarrow x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = z' = 0, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

B. $z = 0 \rightarrow z' = 0$, da die (x', y') -Ebene auf der (x, y) -Ebene gleitet.

C. Um Spiegelungen ($y' = -y$ und dergleichen) auszuschliessen, verlangen wir, dass F für $v \rightarrow 0$ stetig in die Identität übergeht.

D. Zentrale Eigenschaft der Transformationen zwischen Inertialsystemen:

Die Abbildung F muss gemäss Abschnitt 7.1 linear sein (als Folge davon, dass sie geradlinig gleichförmige Bewegungen in geradlinig gleichförmige Bewegungen überführen muss). Das Postulat der universalen Lichtgeschwindigkeit verlangt

zudem, dass F geradlinig gleichförmige Bewegungen der Geschwindigkeit c wieder in geradlinig gleichförmige Bewegungen mit Lichtgeschwindigkeit überführt.

Behauptung 1: Die Abbildung L

$$L : x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.21)$$

erfüllt die Forderungen A bis D.

Beweis: A-C sind trivial. Wir wenden uns nun D zu:

D: Die Abbildung L ist linear und führt nach 7.1 geradlinig gleichförmige Bewegungen wieder in solche über. Zu zeigen bleibt noch, dass Lichtsignale in Lichtsignale übergeführt werden:

Wir starten mit einem Lichtsignal im IS: $\vec{x} = \vec{c}t + \vec{a}$ mit $|\vec{c}| = c$.

Wie erscheint dieses Signal im IS'?

In (7.21) wird x', y', z', t' durch x, y, z, t ausgedrückt. Man kann diese Gl. aber auch nach x, y, z, t auflösen:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, y = y', z = z', t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Wir transformieren nun das Lichtsignal:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{x} = \vec{c}t + \vec{a} \\ \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = c_1 \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + a_1 \quad (i) \\ y' = c_2 \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + a_2 \quad (ii) \\ z' = c_3 \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + a_3 \quad (iii) \end{array} \right.$$

Betrachte Gl. (i):

$$x' \left(1 - \frac{vc_1}{c^2}\right) = t' (c_1 - v) + a_1 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$x' = t' \underbrace{\frac{(c_1 - v)}{1 - vc_1/c^2}}_{c'_1} + \underbrace{\frac{a_1 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vc_1/c^2}}_{a'_1}$$

Aus (ii) und (iii) folgen analog c'_2 und c'_3 . Man findet

$$\vec{c}' = \frac{1}{1 - \frac{vc_1}{c^2}} \left[c_1 - v, c_2 \sqrt{1 - v^2/c^2}, c_3 \sqrt{1 - v^2/c^2} \right].$$

Es gilt: $(\vec{c}')^2 = c^2$, also $|\vec{c}'| = c$. Dies beendet den Beweis.

Behauptung 2: Die Abbildung F ist durch die Eigenschaften A bis D eindeutig festgelegt. Beweis im Anhang B.2.

Konsequenz: $F = L$, "spezielle Lorentztransformation in Richtung der ersten Achse". Die Abbildung L führt jedes Inertialsystem in ein neues Inertialsystem über. L ist durch die Relativgeschwindigkeit v eindeutig festgelegt.

7.5 Transformation zwischen zwei beliebigen IS

Bisher haben wir nur die Situation betrachtet, wo die x -Achse und die x' -Achse zusammenfallen und wo die (x, y) -Ebene und die (x', y') -Ebene aufeinander gleiten. Die Relativbewegung war also in Richtung der ersten Achse mit Geschwindigkeit v . Wir betrachten im folgenden die Transformation zwischen zwei beliebigen Inertialsystemen.

Satz: Die Transformation zwischen den Koordinaten zweier beliebiger Inertialsysteme ist als Produkt der drei speziellen Transformationen L, R, T darstellbar.

$$L : x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

L : **Spezielle Lorentztransformation** in Richtung der ersten Achse

$R : \vec{x}' = \mathbf{R}\vec{x}, t' = t$ Drehung $\mathbf{R} : 3 \times 3$ Rotationsmatrix

$T : \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}, t' = t + b$ Translation

Die Umkehrung des Satzes ist trivial:

- Die 3 Transformationen sind zulässige Koordinatenwechsel. Sie führen insbesondere geradlinig gleichförmige Bewegungen in ebensolche über. Zudem

werden Signale, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten, unter L,R und T in ebensolche übergeführt.

- Das Hintereinanderschalten von beliebig vielen dieser drei Transformationen verletzt diese Eigenschaft natürlich nicht.
- Die Aussage des Satzes besteht also darin, dass **jede** Koordinatentransformation zwischen zwei Inertialsystemen sich durch geeignetes Hintereinanderschalten von L,R,T konstruieren lässt.

Beweis des Satzes:

A. Seien (\vec{x}, t) und (\vec{x}', t') zwei Inertialsysteme. Der Ursprung des gestrichenen IS erfüllt die Gl. $\vec{x}' = 0$ (triviale gleichförmige Bewegung). Nach Postulat (5) muss er sich auch im ungestrichenen IS geradlinig gleichförmig bewegen:

$$\vec{x} = \vec{v}t + \vec{a} \leftrightarrow \vec{x}' = 0$$

B. Durch eine geeignete Drehung des IS (\vec{x}, t) kann man erreichen, dass die Geschwindigkeit \vec{v} in die Richtung der x -Achse zu liegen kommt:

$$(\vec{x}_1, t_1) = R_1(\vec{x}, t)$$

C. Im IS (\vec{x}_1, t_1) bewegt sich der Ursprung des gestrichenen Systems mit der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ in Richtung der ersten Achse. Durch die spezielle Lorentztransformation L mit Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ kann man erreichen, dass der Ursprung des gestrichenen Systems bezüglich (\vec{x}_2, t_2) ruht:

$$(\vec{x}_2, t_2) = L(\vec{x}_1, t_1).$$

D. Die Transformation $(\vec{x}_2, t_2) \rightarrow (\vec{x}', t')$ muss linear sein (siehe Abschnitt 1):

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \mathbf{A}\vec{x}_2 + \vec{B}t_2 + \vec{C} \\ t' &= \vec{D} \cdot \vec{x}_2 + Et_2 + F \end{aligned} \tag{7.22}$$

Sei $\vec{x}_2 = \vec{a}$ der Ort, an dem der Ursprung des gestrichenen Systems ruht

$$0 = \mathbf{A}\vec{a} + \vec{B}t_2 + \vec{C}.$$

Da dies für alle Zeiten gelten soll, muss \vec{B} verschwinden. Konsequenz: Alle Punkte, die im System (\vec{x}_2, t_2) ruhen, tun dies auch bezüglich (\vec{x}', t') .

E. Betrachte eine Uhr U_2 , die im System (\vec{x}_2, t_2) am Ort \vec{x}_2 ruht. Diese Uhr ruht dann nach obigem auch im System (\vec{x}', t') und zwar im Punkt $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}_2 + \vec{C}$. Eine dort ansässige Uhr U' läuft im Gleichtakt mit der Uhr U_2 , da die beiden Uhren relativ zueinander in Ruhe sind. Dies impliziert, dass $E = 1$ sein muss. Soweit lautet Gl. (7.22):

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \mathbf{A}\vec{x}_2 + \vec{C} \\ t' &= \vec{D} \cdot \vec{x}_2 + t_2 + F\end{aligned}\quad (7.23)$$

F. Durch eine Translation um \vec{C} , F können diese Konstanten in (7.23) beseitigt werden:

$$\begin{aligned}(\vec{x}', t') &= T(\vec{x}_3, t_3) \\ \vec{x}_3 &= \mathbf{A}\vec{x}_2 \\ t_3 &= \vec{D} \cdot \vec{x}_2 + t_2.\end{aligned}\quad (7.24)$$

G. Damit die Abbildung $(\vec{x}_2, t_2) \rightarrow (\vec{x}_3, t_3)$ Lichtsignale in Lichtsignale überführt, muss \vec{D} verschwinden und \mathbf{A} eine Drehung oder eine Drehspiegelung darstellen (siehe Anhang B.2). Wenn wir nur IS mit rechtshändig orientierten Achsen (x, y, z) zulassen, dann sind Spiegelungen ausgeschlossen, \mathbf{A} somit eine Drehmatrix, $\mathbf{A} = \mathbf{R}_2$.

$$(\vec{x}_3, t_3) = R_2(\vec{x}_2, t_2).$$

Resultat: $(\vec{x}', t') = T R_2 L R_1 (\vec{x}, t)$ w.z.z.w.

Insbesondere kann jede Transformation zwischen zwei IS, d.h. die allgemeine Lorentztransformation in eine Translation und eine homogene Lorentztransformation Λ zerlegt werden:

$$(\vec{x}', t') = T\Lambda(\vec{x}, t); \quad \Lambda = R_2 L R_1.$$

(Homogene Lorentztransformationen sind dadurch charakterisiert, dass sie den Ursprung des IS nicht verschieben: $\vec{x} = 0, t = 0 \rightarrow \vec{x}' = 0, t' = 0$).

7.6 Poincarégruppe

Die Menge aller Transformationen zwischen Inertialsystemen bildet eine Gruppe ("Poincarégruppe"):

- Je zwei Transformationen A und B ist ein Produkt BA zugeordnet (zusammengesetzte Transformation, zuerst A , dann B).
- Es gibt ein Einselement (auch neutrales Element genannt), die identische Abbildung:

$$\vec{x}' = \vec{x}, \quad t' = t.$$

- Die Transformationen sind eindeutig umkehrbar, d.h., zu A existiert ein inverses Element A^{-1} .
- Es gilt das Assoziativgesetz, d.h., $A(BC) = (AB)C = ABC$ (zuerst C , dann B , dann A).

Übungen:

1. Die Translationen bilden eine Untergruppe.
2. Die Drehungen bilden einer Untergruppe, die Drehgruppe.
3. Die Menge der homogenen Lorentztransformationen Λ :

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{B}t; \quad t' = \vec{D} \cdot \vec{x} + Et$$

ist eine Untergruppe, die Lorentzgruppe.

4. Zeige, dass jedes Element der Drehgruppe durch 3 Parameter charakterisiert werden kann.
5. Zeige, dass die Elemente der Lorentzgruppe durch 6 Parameter charakterisiert werden können (3 Parameter für die Relativgeschwindigkeit und 3 Parameter für die relative Orientierung der Koordinatenachsen).
6. Zeige, dass die Elemente der Poincarégruppe durch 10 Parameter charakterisiert werden können (zusätzlich zu den 6 Parametern, die für den homogenen Teil der Transformation benötigt werden, noch 4 Parameter für die Translationen).

7.7 Galileitransformationen

Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten zweier Inertialsysteme kann im Rahmen der klassischen Mechanik auf die gleiche Weise gewonnen werden wie

für die Relativitätstheorie – es ist lediglich das Postulat der universalen Lichtgeschwindigkeit durch das Postulat der universalen Zeit zu ersetzen.

Aus dem Postulat der universalen Zeit folgt unmittelbar, dass die Zeiten, die die Uhren zweier IS anzeigen, sich höchstens um eine Konstante unterscheiden:

$$t' = t + b.$$

Für die räumlichen Koordinaten gilt wieder ein linearer Zusammenhang (Postulat (5) bleibt unverändert gültig):

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{B}t + \vec{C}. \quad (7.25)$$

Die Forderung, dass die Abstände gleichzeitiger Ereignisse für alle IS gleich gross sind, impliziert, dass \mathbf{A} eine Drehmatrix \mathbf{R} sein muss. (Die beiden IS sollen rechtshändig orientiert sein - Spiegelungen sind daher ausgeschlossen). Für den Ursprung des gestrichenen Systems gilt ($\vec{x}' = 0$)

$$\mathbf{R}\vec{x} + \vec{B}t + \vec{C} = 0.$$

Wir lösen diese Gl. nach \vec{x} auf:

$$\mathbf{R}\vec{x} = -\vec{B}t - \vec{C} \longrightarrow \vec{x} = -\mathbf{R}^{-1}\vec{B}t - \mathbf{R}^{-1}\vec{C}.$$

Im ungestrichenen System bewegt sich also der Ursprung des gestrichenen Systems geradlinig gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = -\mathbf{R}^{-1}\vec{B}$. Somit ist $\vec{B} = -\mathbf{R}\vec{v}$ und wir erhalten für Gl. (7.25)

$$\vec{x}' = \mathbf{R}\vec{x} - \mathbf{R}\vec{v}t + \vec{C} = \mathbf{R}(\vec{x} - \vec{v}t) + \vec{C}.$$

Wenn wir \vec{C} als \vec{a} umbenennen, erhalten wir das

Resultat:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}' = \mathbf{R}(\vec{x} - \vec{v}t) + \vec{a} \\ t' = t + b \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Galileitransformation} \\ (7.26) \end{array}$$

Die relative Lage zweier IS ist durch \mathbf{R} , \vec{v} , \vec{a} , b eindeutig bestimmt ($3 + 3 + 3 + 1 = 10$ Parameter).

Man kann dieses Ergebnis auch als Grenzfall der relativistischen Transformation zwischen Inertialsystemen gewinnen. Ist die Relativgeschwindigkeit der beiden

Systeme viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, dann reduziert sich die spezielle Lorentztransformation L auf G (G heisst Galileitransformation in Richtung der ersten Achse).

$$L : \begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \rightarrow G : \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Insbesondere reduziert sich die Transformationsformel für die Zeit auf $t' = t$; für kleine Relativgeschwindigkeiten ist das Postulat einer universalen Lichtgeschwindigkeit zum Postulat der universalen Zeit äquivalent. (Die beiden anderen Elemente, aus denen sich die allgemeine Lorentztransformation zusammensetzen lässt – R und T – sind auch im Rahmen der klassischen Mechanik zulässige Transformationen zwischen Inertialsystemen.)

Übung:

1. Welche Werte haben die Grössen \mathbf{R} , \vec{v} , \vec{a} , b für die Galileitransformation G in Richtung der ersten Achse?
2. Zeige, dass die allgemeine Galileitransformation (7.26) in der Form TR_2GR_1 dargestellt werden kann.
3. Die Menge der Galileitransformationen bildet die Galileigruppe. Die Elemente A_1, A_2 dieser Gruppe seien durch $\mathbf{R}_1, \vec{v}_1, \vec{a}_1, b_1$ bzw. $\mathbf{R}_2, \vec{v}_2, \vec{a}_2, b_2$ charakterisiert: Zeige, dass das Produkt A_2A_1 durch die Grössen

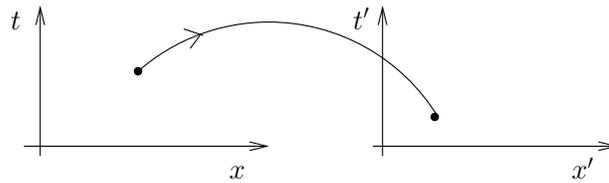
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1; \vec{v} = \vec{v}_1 + \mathbf{R}_1^{-1}\vec{v}_2; \vec{a} = \mathbf{R}_2(\vec{a}_1 - \vec{v}_2b_1) + \vec{a}_2; b = b_1 + b_2$$

bestimmt wird. Was folgt daraus über die Addition von Geschwindigkeiten?

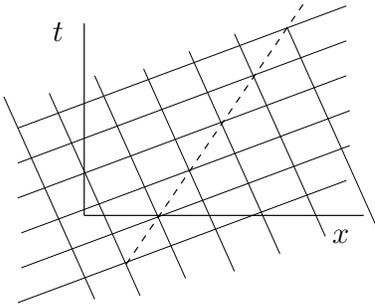
B Linearität der Abbildung zwischen IS

B.1 Zur Linearität der Abbildung zwischen IS

Wir diskutieren das Problem für die 1 + 1-dimensionale Welt $(x, t) \rightarrow (x', t')$.



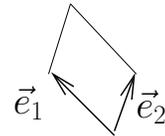
- a. Zeichne ein feinmaschiges Netz bestehend aus zwei Scharen äquidistanter paralleler Weltlinien der Steigung $v < c$:



Jede dieser Weltlinien wird nach Postulat (5), Kap. 5 auf eine Gerade abgebildet. Die Abbildung ist nur dann umkehrbar eindeutig, wenn Parallelen in Parallelen übergehen. Das Bild des Netzes ist somit wieder ein Netz zweier Scharen paralleler Geraden. Die Parallelen müssen äquidistant sein, damit auch das Bild einer Diagonalen wieder eine Gerade wird.

- b. Die Netzpunkte können durch ganze Zahlen charakterisiert werden:

$$\vec{x} = (x, t) = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + \vec{f}.$$



Der Bildpunkt ist durch dieselben Zahlen charakterisiert:

$$\vec{x}' = (x', t') = n_1 \vec{e}'_1 + n_2 \vec{e}'_2 + \vec{f}'.$$

- c. Definiere die (2×2) -Matrix K durch

$$\vec{e}'_1 = K \vec{e}_1; \quad \vec{e}'_2 = K \vec{e}_2.$$

(Eine Matrix ist durch ihre Wirkung auf einen vollständigen, linear unabhängigen Satz von Vektoren eindeutig bestimmt).

Konsequenz: Für Netzpunkte gilt:

$$\vec{x}' = K\vec{x} + \vec{k} \quad (\text{B.1})$$

mit $\vec{k} = \vec{f}' - K\vec{f}$.

d. Ist das Netz genügend feinmaschig, dann kann jedes Ereignis durch den nächstliegenden Netzpunkt approximiert werden. Damit gilt die lineare Abbildung (B.1) für beliebige Ereignisse, wzbw.

B.2 Spezielle Lorentztransformation in Richtung der ersten Achse

In diesem Anhang soll die Behauptung verifiziert werden, dass die Eigenschaften A, B, C, D (vgl. Abschnitt 4) die Abbildung L eindeutig festlegen.

a. Seien (\vec{x}, t) und (\vec{x}', t') zwei Inertialsysteme. Die Abbildung $(\vec{x}', t') = F(\vec{x}, t)$ habe die 4 erwähnten Eigenschaften. Um diese Abbildung zu bestimmen, führen wir ein Hilfssystem (\vec{x}_1, t_1) ein durch die in (7.21) definierte Transformation L :

$$(\vec{x}_1, t_1) = L(\vec{x}, t)$$

und zerlegen die Abbildung F in zwei Schritte:

$$(\vec{x}, t) \xrightarrow{L} (\vec{x}_1, t_1) \xrightarrow{G} (\vec{x}', t') \quad F = G L.$$

b. Nach D ist die Abbildung F linear. Da die Hilfstransformation L ebenfalls linear ist, muss auch G eine lineare Abbildung sein:

$$G : \begin{cases} x' &= A_{11}x_1 + A_{12}y_1 + A_{13}z_1 + B_1t_1 + C_1 \\ y' &= A_{21}x_1 + A_{22}y_1 + A_{23}z_1 + B_2t_1 + C_2 \\ z' &= A_{31}x_1 + A_{32}y_1 + A_{33}z_1 + B_3t_1 + C_3 \\ t' &= D_1x_1 + D_2y_1 + D_3z_1 + Et_1 + F \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

c. Für Ereignisse auf der x -Achse ($y = z = 0, y_1 = z_1 = 0$) stimmt F mit L überein. Somit ist die Abbildung G für Ereignisse auf der x -Achse durch

$$x' = x_1, t' = t_1, y' = z' = 0$$

gegeben. Aus dieser Eigenschaft von G folgt:

$$\begin{aligned}\vec{C} &= F = 0, \quad \vec{B} = 0, \quad E = 1 \\ \vec{x}' &= \mathbf{A}\vec{x}_1 \\ t' &= \vec{D} \cdot \vec{x}_1 + t_1.\end{aligned}\tag{B.3}$$

d. Da sowohl F als auch L die Eigenschaft haben, Lichtsignale auf Lichtsignale abzubilden, muss dies auch für G der Fall sein. Das Bild des Lichtsignals

$$\vec{x}_1 = \vec{c}t_1, \quad |\vec{c}| = c$$

ist durch

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{c}t_1, \quad t' = \vec{D} \cdot \vec{c}t_1 + t_1$$

gegeben. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist

$$\vec{c}' = \frac{\vec{c}}{1 + \vec{D} \cdot \vec{c}}.$$

Die Transformationskoeffizienten \mathbf{A} und \vec{D} müssen daher so beschaffen sein, dass

$$|\mathbf{A}\vec{c}| = (1 + \vec{D} \cdot \vec{c})c\tag{B.4}$$

für jeden Vektor \vec{c} mit $|\vec{c}| = c$.

e. Auswertung von (B.4): Die Bedingung muss auch gelten für $\hat{\vec{c}} = -\vec{c}$, $|\mathbf{A}\hat{\vec{c}}| = |-\mathbf{A}\vec{c}| = |\mathbf{A}\vec{c}|$:

$$|\mathbf{A}\vec{c}| = (1 - \vec{D} \cdot \vec{c})c.$$

Somit muss $\vec{D} \cdot \vec{c}$ für jeden Vektor \vec{c} mit $|\vec{c}| = c$ verschwinden. Dies ist nur der Fall, wenn \vec{D} selbst Null ist (setze z.B. $\vec{c} = (c, 0, 0)$).

Die Matrix \mathbf{A} muss daher jeden Vektor der Länge c auf einen Vektor der Länge c abbilden:

$$|\mathbf{A}\vec{c}| = c.$$

Geometrie des dreidimensionalen euklidischen Raums: jede Matrix mit dieser Eigenschaft bewirkt entweder eine Drehung oder eine Drehspiegelung. Die Eigenschaft C verlangt, dass G für $v \rightarrow 0$ stetig in die Identität übergeht; somit sind Spiegelungen ausgeschlossen, G ist eine reine Drehung.

f. Die Drehung G lässt die Punkte auf der x -Achse liegen. Die Menge der Punkte, die bei einer Drehung liegen bleiben, heisst Drehachse: die Drehachse von G muss

die x -Achse sein. Gleichzeitig führt aber G auch die xy -Ebene in sich selbst über. Es bleibt daher auch die y -Achse liegen, G ist die Identität.

Resultat: $(\vec{x}', t') = L(\vec{x}, t)$ wzbw.

8 Minkowskische Geometrie

8.1 Ereignisraum

Jedem Ereignis sind die vier Zahlen (\vec{x}, t) zugeordnet. Es ist bequem, anstelle von t eine vierte Koordinate x^0 einzuführen, die wie x, y, z die Dimension einer Länge hat:

$$x^0 = ct \quad (x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$$

$$\text{Ereignis } x| = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

In dieser Schreibweise ordnen zwei verschiedene Inertialsysteme demselben Ereignis die Koordinaten $x|$ bzw. $x'|$ zu. Die Abbildung $x| \rightarrow x'|$ (Lorentztransformation) ist eine lineare Transformation der Form

$$x'| = \Lambda x| + a| \quad \text{Matrixschreibweise} \quad (8.1)$$

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad \text{Komponentenschreibweise, } \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Für die spezielle Lorentztransformation in Richtung der x -Achse gilt z.B.

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^{0'} = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ x^{1'} = \frac{-\frac{v}{c}x^0 + x^1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ x^{2'} = x^2 \\ x^{3'} = x^3 \end{cases}$$

In diesem Fall ist $a| = 0$ und die Matrix Λ hat die Form $\Lambda = L$. Die explizite Form der Matrix L lautet (unter Verwendung der Abkürzungen $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$):

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Übung: Bestimme Λ für eine Drehung um die z -Achse.

Lösung: Nur die räumlichen Koordinaten werden nicht-trivial transformiert bei Drehungen:

$$x^{0'} = x^0; \quad \vec{x}' = \mathbf{R}_z \vec{x}; \quad \mathbf{R}_z : 3 \times 3 \text{ Rotationsmatrix}$$

Explizit:

$$\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

und somit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

Nicht jede (4×4) - Matrix Λ vermittelt eine Abbildung zwischen Inertialsystemen (ist eine Lorentztransformation). In Kapitel 7 haben wir gezeigt, dass jede Lorentztransformation aus Translationen T , Drehungen R und der Transformation L zusammengesetzt werden kann. In der Transformationsformel

$$x'| = \Lambda x| + a|$$

beschreibt $a|$ die Translation und die Matrix Λ den homogenen Anteil, welcher sich darstellen lässt als

$$\Lambda = R_2 \cdot L \cdot R_1 \leftrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 R_{2\alpha}^\mu L^\alpha{}_\beta R_{1\nu}^\beta.$$

8.2 Zweidimensionale Welt, Lorentztransformationen als hyperbolische Drehungen

Wir diskutieren zunächst wieder nur Ereignisse auf der x -Achse, die durch die beiden Zahlen (x^0, x^1) charakterisiert werden können. Die Transformation L bewirkt in diesem zweidimensionalen Raum die Abbildung

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad x^{1'} = \frac{-\frac{v}{c}x^0 + x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

die durch die Geschwindigkeit v vollständig festgelegt ist. Führt man anstelle von v den Parameter α ein durch

$$\begin{aligned} \operatorname{th}\alpha &\doteq \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = \frac{v}{c} \\ \rightarrow \operatorname{ch}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \operatorname{sh}\alpha = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

dann lässt sich diese Abbildung in der Form

$$\begin{cases} x^{0'} = +\operatorname{ch}\alpha x^0 - \operatorname{sh}\alpha x^1 \\ x^{1'} = -\operatorname{sh}\alpha x^0 + \operatorname{ch}\alpha x^1 \end{cases} \quad (8.6)$$

darstellen.

Übung: Zeige, dass die aus α_1 und α_2 zusammengesetzte Lorentztransformation durch $\alpha_1 + \alpha_2$ charakterisiert ist.

Übung: Zeige, dass der für den Dopplereffekt massgebende Faktor $\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ die Grösse e^α misst: $\nu_1 = e^{\pm\alpha}\nu_0$ (+: Emission vorwärts, -: rückwärts).

Die Darstellung (8.6) manifestiert eine enge Verwandtschaft zwischen Lorentztransformationen und Drehungen:

$$\begin{cases} x^{1'} = \cos\varphi x^1 - \sin\varphi x^2 \\ x^{2'} = \sin\varphi x^1 + \cos\varphi x^2 \end{cases} \quad (8.7)$$

8.3 Minkowskische Distanz in der zweidimensionalen Welt

Die Drehungen (8.7) sind dadurch ausgezeichnet, dass sie die euklidische Distanz zweier Punkte A, B nicht ändern.

$$\begin{aligned} d_{AB}^2 &\doteq (x_A^1 - x_B^1)^2 + (x_A^2 - x_B^2)^2 \\ &= (x_A^{1'} - x_B^{1'})^2 + (x_A^{2'} - x_B^{2'})^2. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Die Lorentztransformation (8.6) lässt stattdessen die Minkowskische Distanz zweier Ereignisse A, B unverändert (wir betrachten vorläufig wieder nur Ereignisse auf der x -Achse):

$$\begin{aligned} s_{AB}^2 &\doteq (x_A^0 - x_B^0)^2 - (x_A^1 - x_B^1)^2 \\ &= (x_A^{0'} - x_B^{0'})^2 - (x_A^{1'} - x_B^{1'})^2. \end{aligned} \quad (8.9)$$

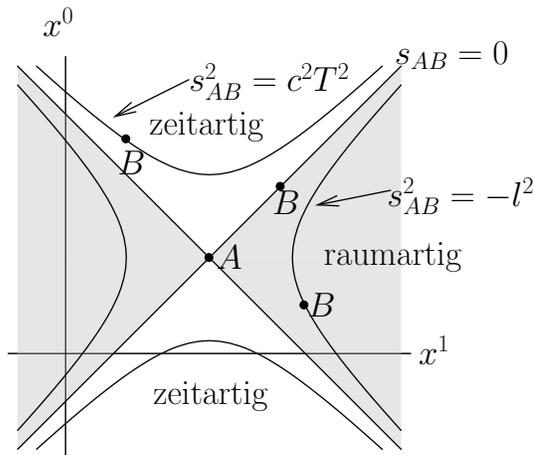
Übung: Beweise diese Behauptungen (unter Verwendung von $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, resp. $\text{ch}^2 \alpha - \text{sh}^2 \alpha = 1$).

Im Gegensatz zur euklidischen Distanz d_{AB} für die stets $d_{AB}^2 \geq 0$ gilt, ist die Grösse s_{AB}^2 indefinit; s_{AB}^2 stellt nicht für alle Ereignispaare das Quadrat einer reellen Grösse dar.

Ereignisse B mit $s_{AB}^2 > 0$ heissen zu A zeitartig.

Ereignisse B mit $s_{AB}^2 < 0$ heissen zu A raumartig.

Lichtstrahlen, die durch A gehen, verlaufen auf den beiden Geraden $x^1 - x_A^1 = x^0 - x_A^0$ und $x^1 - x_A^1 = -(x^0 - x_A^0)$. Für alle Ereignisse B , die mit A durch ein Lichtsignal verbunden werden können, gilt somit $s_{AB}^2 = 0$ (B liegt lichtartig zu A).



Ereignisse gleicher Minkowskischer Distanz von A liegen auf der Hyperbel

$$(x^0 - x_A^0)^2 - (x^1 - x_A^1)^2 = \text{konst.}$$

Beachte: Die Begriffe zeitartig, raumartig und lichtartig sind unabhängig vom verwendeten IS (einfach deshalb, weil die Minkowski'sche Distanz unabhängig vom IS ist).

8.4 Minkowskische Distanz beliebiger Ereignisse

Zurück zum vierdimensionalen Ereignisraum. Die Minkowskische Distanz zweier beliebiger Ereignisse x_A, x_B ist definiert als

$$\begin{aligned} s_{AB}^2 &= (x_A^0 - x_B^0)^2 - (x_A^1 - x_B^1)^2 - (x_A^2 - x_B^2)^2 - (x_A^3 - x_B^3)^2 \\ &= (x_A^0 - x_B^0)^2 - (\vec{x}_A - \vec{x}_B)^2. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Satz: Die Minkowskische Distanz zweier Ereignisse ist unabhängig vom Inertialsystem, in dem sie ausgewertet wird.

Beweis: a.) Die Minkowskische Distanz ist invariant gegenüber der speziellen Lorentztransformation L

$$\begin{aligned} x_A^{0'} - x_B^{0'} &= +\text{ch}\alpha (x_A^0 - x_B^0) - \text{sh}\alpha (x_A^1 - x_B^1) \\ x_A^{1'} - x_B^{1'} &= -\text{sh}\alpha (x_A^0 - x_B^0) + \text{ch}\alpha (x_A^1 - x_B^1) \\ x_A^{2'} - x_B^{2'} &= x_A^2 - x_B^2 \\ x_A^{3'} - x_B^{3'} &= x_A^3 - x_B^3 \\ (x_A^{0'} - x_B^{0'})^2 - (x_A^{1'} - x_B^{1'})^2 &= (x_A^0 - x_B^0)^2 - (x_A^1 - x_B^1)^2 \\ (x_A^{2'} - x_B^{2'})^2 + (x_A^{3'} - x_B^{3'})^2 &= (x_A^2 - x_B^2)^2 + (x_A^3 - x_B^3)^2 \\ \rightarrow s_{AB}^{\prime 2} &= s_{AB}^2 \end{aligned}$$

b.) Die Minkowskische Distanz ist invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems

$$\begin{aligned} x^{0'} &= x^0, \quad \vec{x}' = \mathbf{R}\vec{x} \\ x_A^{0'} - x_B^{0'} &= x_A^0 - x_B^0 \\ \vec{x}'_A - \vec{x}'_B &= \mathbf{R}(\vec{x}_A - \vec{x}_B) \\ \rightarrow |\vec{x}'_A - \vec{x}'_B| &= |\vec{x}_A - \vec{x}_B| \rightarrow s_{AB}^{\prime 2} = s_{AB}^2 \end{aligned}$$

c.) Die Minkowskische Distanz ist invariant gegenüber Translationen

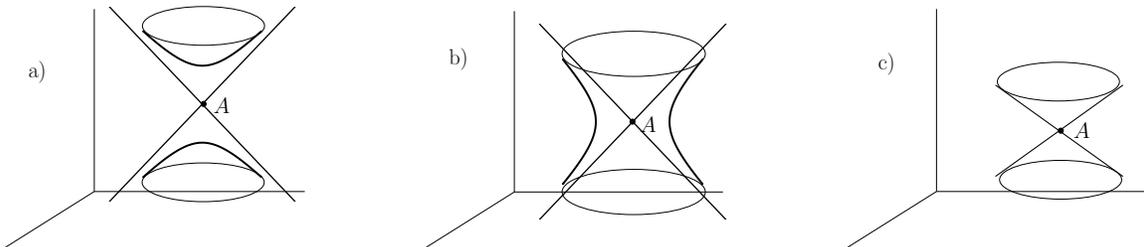
$$x' = x + a \rightarrow x'_A - x'_B = x_A - x_B \rightarrow s_{AB}^{\prime 2} = s_{AB}^2.$$

d.) Jede Lorentztransformation kann als Produkt einer speziellen Lorentztransformation, Drehungen und einer Translation erzeugt werden. Da diese Operationen

die Minkowskische Distanz nicht ändern, ist s_{AB}^2 unabhängig vom Inertialsystem, wzbw.

Konsequenz: Ist das Ereignis B zeitartig (raumartig) zu A in irgendeinem Inertialsystem, dann ist dies in jedem IS der Fall.

Die Menge aller Ereignisse, die von einem festen Ereignis A dieselbe Minkowski Distanz s^2 aufweisen, ist ein zweischaliges Hyperboloid für $s^2 > 0$ (Fig. a)), ein einschaliges Hyperboloid für $s^2 < 0$ (Fig. b)) und ein Doppelkegel für $s^2 = 0$, welcher Lichtkegel von A heisst (Fig. c)).



8.5 Eigenzeit, ideale Uhr, Zwillingsparadoxon

1. Geradlinig gleichförmig bewegte Uhren messen die Minkowskische Distanz

Eine Uhr bewege sich auf der Weltlinie $\vec{x} = \vec{v}t + \vec{a}$. Dies sei die Beschreibung im Inertialsystem IS.

Gehe in ein mitfliegendes System (IS'), bezüglich welchem die erwähnte Uhr ruhen soll an der Stelle $\vec{x}' = \text{konst.}$ Sie läuft synchron mit den Uhren des IS'.

Betrachte zwei Ereignisse: Ereignis A : Uhr zeigt T_A an; Ereignis B : Uhr zeigt T_B an.

Minkowskische Distanz der Ereignisse (ausgewertet im IS'):

$$s_{AB}^{\prime 2} = (x_A^{0'} - x_B^{0'})^2 - (\vec{x}'_A - \vec{x}'_B)^2.$$

Da die Uhr im IS' ruht, gilt $\vec{x}'_A = \vec{x}'_B$. Ferner ist $x_A^{0'} - x_B^{0'} = c(T_A - T_B)$, da die Uhr mit den Uhren des mitfliegenden IS synchron läuft. Somit ist

$$s_{AB}^{\prime 2} = c^2 (T_A - T_B)^2; \quad s'_{AB} = c |T_A - T_B|, \text{ wzbw.}$$

Umgekehrt: Die Minkowskische Distanz zweier zeitartiger Ereignisse A, B ist bis auf den Faktor c gleich der Zeit, die auf einer Uhr verstreicht, welche geradlinig gleichförmig von A nach B oder von B nach A fliegt.

Beurteilung vom IS (x^0, x^1, x^2, x^3) aus: Die Uhren dieses IS zeigen für die Ereignisse A, B die Zeiten t_A, t_B an:

$$x_A^0 = ct_A, \quad x_B^0 = ct_B.$$

Die entsprechenden Ortskoordinaten sind

$$\vec{x}_A = \vec{v}t_A + \vec{a}; \quad \vec{x}_B = \vec{v}t_B + \vec{a}.$$

Die Minkowskische Distanz der Ereignisse ist somit (im IS ausgewertet)

$$\begin{aligned} s_{AB}^2 &= (x_A^0 - x_B^0)^2 - (\vec{x}_A - \vec{x}_B)^2 \\ &= c^2 (t_A - t_B)^2 - (\vec{v}t_A - \vec{v}t_B)^2 \\ &= \left\{ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right\} c^2 (t_A - t_B)^2. \end{aligned}$$

Da die Minkowskische Distanz unabhängig ist vom System, in welchem sie ausgewertet wird, gilt $s'_{AB} = s_{AB}$. Dies impliziert:

$$T_A - T_B = \sqrt{1 - v^2/c^2} (t_A - t_B) \quad \text{Zeitdilatation}$$

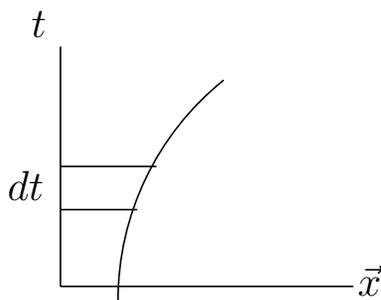
Infinitesimal geschrieben lautet diese Relation:

$$dT = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \quad \text{oder} \quad ds = \sqrt{1 - v^2/c^2} dx^0.$$

Man sagt, die bewegte Uhr messe ihre Eigenzeit T ; diese ist nicht anderes als die Minkowskische Distanz (modulo c) längs der Weltlinie $\vec{x} = \vec{v}t + \vec{a}$.

2. Ideale Uhr

Wie rasch läuft eine beschleunigte Uhr? Eine beschleunigte Uhr heisst ideal, wenn sie ungeachtet der Beschleunigung stets die Minkowskische Distanz auf ihrer Weltlinie misst:



$$dT = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$$

Dies bedeutet, dass ihr Gang stets derselbe ist wie der Gang einer momentan gleichförmig mitfliegenden Uhr derselben Geschwindigkeit.

Verhalten sich materielle Uhren ideal?

1. Beispiel: Pendeluhr wird im Schwerfeld der Erde mit der Beschleunigung b hochgezogen. Die Uhr läuft ganz falsch, selbst wenn ihre Geschwindigkeit viel kleiner ist als c :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+b}} \quad \text{Schwingungsdauer für } v \ll c.$$

(Eine frei fallende Pendeluhr bleibt stehen, $b = -g \rightarrow T = \infty$).

2. Beispiel: Müonen der Geschwindigkeit $v < c$ bewegen sich im Magnetfeld auf kreisförmigen Bahnen. Die Zerfallsrate hängt innerhalb der Messgenauigkeit nur vom Geschwindigkeitsbetrag der Bewegung ab,

$$T_{\text{Flug}} = T_{\text{Ruhe}} / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Obschon in diesem Fall die Beschleunigung wesentlich grösser ist als im Beispiel 1, verhalten sich Müonen wie ideale Uhren.

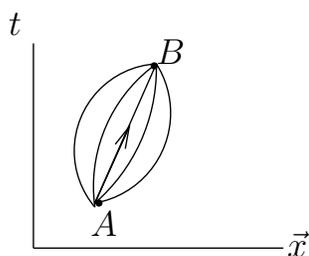
Moral: Es gibt Uhren, die selbst bei hohen Beschleunigungen ideal laufen und andere. Ist der Gang einer Uhr nicht nur von ihrer Geschwindigkeit, sondern auch von der Beschleunigung abhängig, der sie ausgesetzt ist (nicht ideale Uhr), dann reicht die relativistische Kinematik nicht aus, um die Eigenzeit zu bestimmen, die sie anzeigt.

Eine ideale Uhr, die längs der Weltlinie $\vec{x} = \vec{x}(t)$ bewegt wird, misst zwischen t_A und t_B die Zeit (Eigenzeit)

$$T_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2(t)}{c^2}}. \quad (8.11)$$

3. Beschleunigung erhält jung

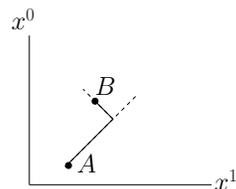
Vergleiche die Eigenzeiten idealer Uhren, die alle von A nach B fliegen.



Behauptung: Die geradlinig gleichförmig von A nach B bewegte Uhr misst die grösste Eigenzeit. Mathematisch gesprochen bedeutet dies, dass die geradlinig gleichförmige Bewegung das Eigenzeitfunktional (8.11) zu einem Maximum macht.

Der Beweis kann mit Methoden der Variationsrechnung geführt werden, welche in Mechanik II besprochen werden. Wir lassen den Beweis deshalb hier weg.

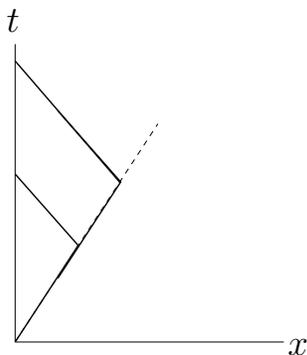
Beachte: Eine Uhr, die sich fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, benötigt praktisch keine Eigenzeit, um von A nach B zu gelangen.



$$\int dt \underbrace{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}_{\approx 0} \approx 0$$

4. Zwillingsparadoxon

Zwillinge machen ein Ausflug. Der eine kehrt früher zurück als der andere; im übrigen seien die Beschleunigungen in der Startphase, bei der Umkehr und bei der Landung dieselben.



Übung: Zeige, dass der später zurückkehrende Zwilling bei seiner Rückkehr jünger sein wird als sein Bruder, obschon die beiden dieselben Beschleunigungsphasen durchgemacht haben. (Selbst wenn biologische Uhren sich nicht ideal verhalten, wird eine Abweichung vom idealen Verhalten nur in den Beschleunigungsphasen auftreten und für gleiche Beschleunigungsverläufe gleich gross sein).

8.6 Metrischer Tensor

Die Minkowskische Distanz ordnet je zwei Ereignissen $x_A|, x_B|$ eine Zahl zu:

$$s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2; \quad \Delta x| = x_A| - x_B|.$$

Diese Zuordnung stellt eine quadratische Form dar:

$$\begin{aligned} s^2 &= \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \\ &= g_{00}(\Delta x^0)^2 + g_{01}\Delta x^0\Delta x^1 + \dots + g_{33}(\Delta x^3)^2. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser quadratischen Form sind

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -1, \quad g_{33} = -1 \\ g_{\mu\nu} &= 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Die Matrix g heisst metrischer Tensor oder Metrik. In Matrixschreibweise hat g die Form

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.13}$$

Speziell gilt für die Minkowskische Distanz infinitesimal benachbarter Ereignisse

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{Mink. Linienelement}). \tag{8.14}$$

Die euklidische Distanz eines vierdimensionalen Raumes ist stattdessen durch die quadratische Form

$$d^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 + (\Delta x^4)^2$$

charakterisiert. Der entsprechende metrische Tensor ist die Einismatrix $\mathbf{1}$. Die Minkowskische Distanz wird auch als pseudoeuklidische Distanz bezeichnet.

8.7 Vierergeschwindigkeit

Die relativistische Summe V von zwei Geschwindigkeiten v_1 und v_2 lautet gemäss Abschnitt 5.5:

$$V = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

V hängt auf nicht-lineare Weise von v_1 und v_2 ab.

Diese Nicht-Linearität rührt daher, dass sowohl der Zähler als auch der Nenner des Differentialquotienten

$$\frac{d\vec{x}}{dt}$$

beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen in nicht-trivialer Weise transformieren.

Um dies zu umgehen, ist es günstig, anstelle des systemabhängigen Zeitintervalls dt das entsprechende Intervall

$$dT = \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2} dt$$

der Eigenzeit des Massenpunkts zu betrachten. Wir definieren

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dT}; \quad u^0 = \frac{dx^0}{dT}; \quad (dx^0 \equiv c dt).$$

Die Eigenzeit dT , die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen $(\vec{x}, t), (\vec{x} + d\vec{x}, t + dt)$ auf der Weltlinie des Teilchens verstreicht, ist im Gegensatz zu dt , unabhängig vom Beobachter.

Die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ legt die **Vierergeschwindigkeit** $u|$ fest:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dT} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} \dot{\vec{x}}; \quad u^0 = \frac{dx^0}{dT} = \frac{dx^0}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}},$$

oder kompakter geschrieben:

$$u| = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} \begin{pmatrix} c \\ \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

Umgekehrt gilt:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{u}}{u^0} c.$$

Beachte: Nur drei der vier Komponenten von $u|$ sind unabhängig, da

$$(u^0)^2 - \vec{u}^2 \equiv c^2, \quad (8.16)$$

(d.h. die Minkowskische Länge des Vektors $u|$ ist die Lichtgeschwindigkeit).

$u|$ transformiert sich (im Gegensatz zu $\dot{\vec{x}}$) auf einfacher Weise.

$u|$: sei die Vierergeschwindigkeit eines Massenpunktes zu irgendeinem Zeitpunkt im IS (x^0, x^1, x^2, x^3) .

$u'|$: Vierergeschwindigkeit desselben Punkts auf der Weltlinie bezüglich des IS (x^0, x^1, x^2, x^3) .

Behauptung: Wenn sich die Koordinaten gemäss

$$x'| = \Lambda x| + a| \quad \text{Lorentztransformation}$$

transformieren, dann lautet das Transformationsgesetz der Vierergeschwindigkeit

$$u'| = \Lambda u|. \quad (8.17)$$

Beweis: Seien $x|, x| + dx|$ zwei infinitesimal aufeinanderfolgende Ereignisse auf der Weltlinie des Teilchens. Im gestrichenen IS sind diese Ereignisse durch

$$x'| = \Lambda x| + a| \quad \text{und} \quad x'| + dx'| = \Lambda (x| + dx|) + a|$$

beschrieben, d.h.

$$dx'| = \Lambda dx| \quad \text{oder} \quad dx^{\mu'} = \sum_{\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}.$$

Die Eigenzeit, die zwischen den beiden Ereignissen verstreicht, ist in beiden Systemen gleich, d.h., $dT = dT'$. Also gilt

$$u'| = \frac{dx'|}{dT'} = \frac{\Lambda dx|}{dT} = \Lambda u| \quad \text{wzbw.}$$

Anwendungen:

1. Wenn das Teilchen im IS (x^0, x^1, x^2, x^3) ruht, d.h. $u^0 = c, \vec{u} = 0$, dann ist die Vierergeschwindigkeit bezüglich eines IS, das sich längs der x -Achse mit der Geschwindigkeit V bewegt, gegeben durch

$$u'| = L u|.$$

Unter Verwendung der Abkürzung $\Gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ lautet diese Gleichung explizit (siehe auch Gl. (8.2))

$$u'| = \begin{pmatrix} \Gamma & -\frac{V}{c}\Gamma & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c}\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\Gamma \\ -V\Gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies stimmt in der Tat mit der Vierergeschwindigkeit eines Teilchens mit $\frac{d\vec{x}'}{dt'} = (-V, 0, 0)$ überein.

2. Ein Teilchen bewege sich im IS (x^0, x^1, x^2, x^3) mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt es sich im IS $(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, das sich in bezug auf das ungestrichene IS mit der Geschwindigkeit V in Richtung der x -Achse bewegt?

Wir transformieren vorerst die entsprechende Vierergeschwindigkeit $u|$. Unter Verwendung der Abkürzungen $\Gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ und $\gamma = (1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2)^{-1/2}$ ergibt sich für $u|$:

$$u'| = \begin{pmatrix} \Gamma & -\frac{V}{c}\Gamma & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c}\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \dot{x}^1 \\ \gamma \dot{x}^2 \\ \gamma \dot{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\Gamma\gamma(1 - \frac{V\dot{x}^1}{c^2}) \\ \Gamma\gamma(\dot{x}^1 - V) \\ \gamma \dot{x}^2 \\ \gamma \dot{x}^3 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich für die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}'$:

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'} = c \frac{\vec{u}'}{u^{0'}} = \frac{1}{1 - V \dot{x}^1/c^2} \left(\dot{x}^1 - V, \frac{\dot{x}^2}{\Gamma}, \frac{\dot{x}^3}{\Gamma} \right). \quad (8.18)$$

Für den Spezialfall $\dot{x}^2 = \dot{x}^3 = 0$ stimmt dies mit der Additionsformel für entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten überein.

8.8 Viererimpuls

Wir drücken die Energie E und den Impuls \vec{p}

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}}; \quad \vec{p} = \frac{m \dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}}$$

mit geeigneten Komponenten der Vierergeschwindigkeit

$$u| = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} \begin{pmatrix} c \\ \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{pmatrix}$$

aus. Man erhält

$$E = m c u^0; \quad \vec{p} = m \vec{u}.$$

Die Komponenten des durch

$$p| = m u| \quad (8.19)$$

definierten Vierervektors $p|$ haben die Bedeutung von Energie und Impuls des Teilchens

$$p| = \begin{pmatrix} E/c \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{kurz}}{=} \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \text{Viererimpuls} \quad (8.20)$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass sich Energie und Impuls eines Teilchens ebenfalls sehr einfach von einem IS auf ein anderes umrechnen lassen:

$$x'| = \Lambda x| + a| \rightarrow p'| = \Lambda p|. \quad (8.21)$$

Allgemein werden vierkomponentige Grössen $V|$, die sich nach dem Transformationsgesetz $V'| = \Lambda V|$ transformieren, als Vektoren bezeichnet ($u|$ und $dx|$ sind Vektoren, $x|$ ist kein Vektor).

Resultat: Der Viererimpuls $(E/c, \vec{p})$ ist ein Vektor.

Kommentare:

- (a) Dies ist nur der Fall, wenn E die Gesamtenergie des Teilchens (inklusive Ruheenergie) bezeichnet. Die Grösse $(T/c, \vec{p})$ ist kein Vektor.
- (b) Die Minkowskische Länge des Viererimpulses ist mc :

$$(p^0)^2 - \vec{p}^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2.$$

Dies ist nichts anderes als die Massenschalenbeziehung (siehe Abschnitt 6.4).

- (c) Gelten Energiesatz und Impulssatz für irgendeinen Prozess in einem IS, dann gelten sie für diesen Prozess in jedem IS:

$$p_1| + p_2| = p_3| + p_4| + p_5|; \quad p'_1| = \Lambda p_1| \quad \text{etc}$$

$$\begin{aligned} p'_1| + p'_2| &= \Lambda p_1| + \Lambda p_2| \\ &= \Lambda (p_1| + p_2|) \\ &= \Lambda (p_3| + p_4| + p_5|) \\ &= \Lambda p_3| + \Lambda p_4| + \Lambda p_5| \\ &= p'_3| + p'_4| + p'_5|. \end{aligned}$$

- (d) Übung: Gilt der Energiesatz für einen bestimmten Prozess in jedem IS, dann gilt auch der Impulssatz.
- (e) Im Abschnitt 6.4 und 6.7 haben wir die Gesamtenergie E , den Gesamtimpuls \vec{P} und die Gesamtmasse M eines Systems eingeführt, das aus N -Komponenten zusammengesetzt ist:

$$E = E_1 + \dots + E_N \quad \text{Gesamtenergie}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_N \quad \text{Gesamtimpuls}$$

Wir können natürlich den Gesamt-Viererimpuls $P|$ einführen:

$$P| = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{P} \end{pmatrix}.$$

Dieser transformiert sich als Vektor, d.h.,

$$x'| = \Lambda x| + a| \implies P'| = \Lambda P|.$$

Die Gesamtmasse M des Systems ist definiert als

$$M^2 c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{P}^2.$$

$$\implies \text{Gesamtmasse} = \frac{\text{Mink. Länge des Gesamt-Viererimpulses}}{c}$$

Da die Minkowski'sche Länge eines Vierervektors unabhängig ist vom IS, in welchem sie ausgewertet wird, folgt:

Die Gesamtmasse eines Systems ist unabhängig vom IS

oder in anderen Worten:

Die Gesamtmasse eines Systems ist lorentzinvariant.

Anwendungen des Transformationsgesetzes für Energie und Impuls

1. Ein ruhendes Teilchen hat Energie $E_0 = m c^2$, aber keinen Impuls:

$$p| = \begin{pmatrix} \frac{E_0}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme Energie und Impuls dieses Teilchens in einem IS, das sich mit der Geschwindigkeit V gegenüber dem Teilchen bewegt:

$$p'| = L p| = \begin{pmatrix} \Gamma & -\frac{V}{c}\Gamma & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c}\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{E_0}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \begin{pmatrix} \frac{E_0}{c} \\ -\frac{V}{c^2} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für E' und \vec{p}' erhalten wir also

$$E' = \Gamma E_0 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad \vec{p}' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} (-mV, 0, 0).$$

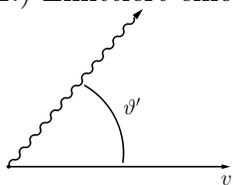
2. Ein Photon der Frequenz ν wird im IS (\vec{x}, t) im Winkel ϑ zur x -Achse emittiert. Welche Frequenz ν' und welchen Winkel ϑ' zur x' -Achse weist es bezüglich eines IS auf, das sich mit der Geschwindigkeit V längs der x -Achse bewegt?

$$p| = \frac{h\nu}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}; \quad p'| = L p| = \frac{h\nu}{c} \begin{pmatrix} \Gamma \left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right) \\ \Gamma \left(-\frac{V}{c} + \cos \vartheta\right) \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{h\nu'}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \vartheta' \\ \sin \vartheta' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \nu' = \nu \frac{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad \tan \vartheta' = \frac{\sin \vartheta \sqrt{1 - V^2/c^2}}{\left(-\frac{V}{c} + \cos \vartheta\right)}.$$

Übungen:

- 1.) Emittiert eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Quelle Licht im Winkel ϑ' zur Flugrichtung, dann erscheint die Frequenz blauverschoben an der Stelle



$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta'}.$$

- 2.) Verifiziere, dass dieses Resultat in den Grenzfällen $\vartheta' = 0, \pi$ mit dem früher gefundenen Dopplereffekt für Vorwärts- und Rückwärtsemission übereinstimmt.
- 3.) Ein Proton des Impulses $\vec{p} = (p, 0, 0)$ trifft auf ein ruhendes Target der Masse m_T . Bestimme die Transformation auf das entsprechende Schwerpunktsystem. Welchen Impuls hat das Proton im Schwerpunktsystem?

C Orthogonale und Pseudoorthogonale Transformationen

Eine lineare Transformation des N -dimensionalen Vektorraums

$$x' = Ax + a$$

lässt genau dann den euklidischen Abstand

$$d_{AB}^2 = \underline{\Delta x} \cdot \Delta x = (\Delta x^1)^2 + \dots + (\Delta x^N)^2; \quad \Delta x = x_A - x_B.$$

unverändert, wenn die Matrix A orthogonal ist:

$$A^T \cdot A = \mathbf{1} \tag{C.1}$$

Eine lineare Transformation des vierdimensionalen Raums lässt genau dann die Minkowskische Distanz

$$s_{AB}^2 = \underline{\Delta x} \cdot g \cdot \Delta x = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2$$

unverändert, wenn gilt

$$A^T \cdot g \cdot A = g \tag{C.2}$$

Übung: Beweise diese Behauptung.

Die Bedingung (C.2) ist zur Orthogonalitätsbedingung (C.1) völlig analog: für die euklidische Distanz ist der metrische Tensor g gleich der Einismatrix $\mathbf{1}$. Man kann daher die Lorentztransformationen als pseudoorthogonale Transformationen auffassen (sie sind orthogonal bezüglich der pseudo-euklidischen Distanz von Minkowski).

Übung: Zeige, dass die Matrix L der Bedingung (C.2) tatsächlich genügt.

Umkehrung: 1.) (Satz von Rätz). Jede Transformation, die die Minkowskische Distanz unverändert lässt, ist linear. 2.) Jede solche Transformation ist bis auf eine Spiegelung der Raum- und/oder der Zeitkoordinaten eine Lorentztransformation (vermittelt Abbildung zwischen zwei IS, ist darstellbar als $T \cdot R_2 \cdot L \cdot R_1$).